

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

*СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ*



ВЫПУСК
1

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
1934

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

Р. Н. БОНЧКОВСКОГО и проф. И. И. ЧИСТЯКОВА

ВЫПУСК ПЕРВЫЙ

О Н Т И
ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО - ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА 1934 ЛЕНИНГРАД

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Москва, Центр, Комсомольский пер., 6, ГТТИ

Редакция Р. Н. Бончковского.
Корректурa Т. С. Арнольд.

Оформление О. Н. Персияниновой.
Выпускающий Д. А. Липсе.

Сдано в производство 25/V—1934 г. Подпис. к печ. 29/IX 1934 г. Листов 4^{1/2}. Фор. 62×94^{1/4}.
Печ. вн. в л. 48.000. ГТТИ № 84. Зак. № 574. Москва Уполном. Главлита В-95255.

1-я Журнальная тип. ОНТИ НКТП СССР, Москва, Денисовский, 30.

ОТ РЕДАКЦИИ

Предпринятое ГТТИ издание сборников «Математическое просвещение» имеет своей задачей пойти навстречу существующему среди учащихся и учащихся средних школ и техникумов усиленному запросу на математическую литературу, которая дополняла бы, расширяла и углубляла их математические знания.

Ввиду этого в сборниках будут помещаться очерки и статьи математического содержания, заметки по вопросам преподавания математики, очерки из истории математики, библиографические заметки, задачи и решения их, упражнения для учащихся и другой материал по вопросам элементарной и началам высшей математики. Печатаемый материал, представляющий интерес для указанных категорий читателей, частично может быть использован также студентами и преподавателями педвузов. К участию в сборниках редакция привлекает профессоров и преподавателей математики высших и средних учебных заведений, наиболее интересующихся математикой и успевающих учащихся, а также всех лиц, сочувствующих этому намерению — дать в живой и интересной форме свежий и новый материал из области математики и тем посылить способствовать подъему математического образования в СССР на более высокую ступень, соответствующую грандиозному техническому прогрессу и общему культурному росту страны.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

От редакции	3
-----------------------	---

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

С. И. Зетель. О делении сторон треугольника пропорционально n -м степеням прилежащих сторон	5
А. В. Геометрическое доказательство теоремы Вильсона	9
И. И. Чистяков. О рациональных треугольниках	10
Р. Н. Бончковский. Геометрическое суммирование одного ряда	17
Заметка о третьем случае равенства треугольников	19
Т. Кароннэ. Об описанных четырехугольниках	21

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

В. А. Кудрявцев. Общая формула для производной n -го порядка степени некоторой функции	26
Г. К. Брусиловский. Единая схема вычисления частного интеграла линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и особенной правой частью	34

МЕТОДИКА

Н. Н. Никитин. Успеваемость по математике в образцовых школах РСФСР на основании контрольных работ, проведенных НКП в ноябре 1933 года	47
--	----

ЗАДАЧИ И СМЕСЬ

Об алгебраических вычислениях	63
Задачи.	65
Смесь. Об одной формуле	67
Упражнения для учащихся	68
Библиография	70

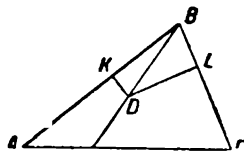


ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

О ДЕЛЕНИИ СТОРОН ТРЕУГОЛЬНИКА ПРОПОРЦИОНАЛЬНО n -М СТЕПЕНЯМ ПРИЛЕЖАЩИХ СТОРОН

С. И. Зетель (Москва)

Впервые, повидимому, эта задача была поставлена и решена М. Пудра (M. Poudra) в его заметке, помещенной в «*Nouvelles Annales de Mathématiques*» в 1856 г. М. д'Окань (M. d'Ocagne) в 1883 г. поместил в том же журнале статью по этому же вопросу. Не будучи знаком с работами Пудра и д'Оканя, я в 1929 г. поместил в «Математическом образовании» № 2—3 статью «О построении и свойствах некоторых чевиан», где дал два способа построения прямых, делящих сторону треугольника в отношении n -х степеней прилежащих сторон. Один из данных мною способов построения тождественен способу д'Оканя. Это построение дает возможность перейти от прямых, делящих сторону треугольника в отношении n -х степеней прилежащих сторон, — в дальнейшем эти прямые будем называть «прямыми n », — к «прямым $n + 2$ ».



Фиг. 1.

В настоящей заметке я хочу дать один чрезвычайно простой способ деления стороны треугольника пропорционально n -м степеням прилежащих сторон путем перехода от «прямых n » к «прямым $n + 1$ ». Предварительно докажем две леммы.

Лемма I. «Прямая n » делит угол, из вершины которого она выходит, на два угла так, что синусы этих углов пропорциональны $n - 1$ степеням прилежащих сторон.

Доказательство. Дан треугольник ABC ($AB \neq BC$). Основание «прямой n » обозначим через β_n (фиг. 1).

Тогда имеем:

$$\frac{\text{пл } \triangle A\beta_n B}{\text{пл } \triangle B\beta_n C} = \frac{c^n}{a^n}. \quad (1)$$

С другой стороны,

$$\frac{\text{пл } \triangle A\beta_n B}{\text{пл } \triangle B\beta_n C} = \frac{AB \cdot \beta_n B \cdot \sin (A\beta_n B)}{BC \cdot \beta_n B \cdot \sin (\beta_n BC)} = \frac{c \sin (A\beta_n B)}{a \sin (\beta_n BC)}. \quad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2), получаем:

$$\frac{c^n}{a^n} = \frac{c \sin (A\beta_n B)}{a \sin (\beta_n BC)}.$$

следовательно,

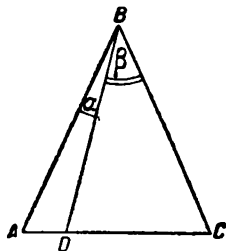
$$\frac{\sin (A\beta_n)}{\sin (\beta_n BC)} = \frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}. \quad (3)$$

Лемма II. *Прямая, исходящая из вершины равнобедренного треугольника, делит основание на части, пропорциональные синусам противолежащих углов.*

Пусть в треугольнике ABC $AB=BC$ (фиг. 2). Из рассмотрения треугольников ADB и BDC получим:

$$\frac{\text{пл } \triangle ADB}{\text{пл } \triangle BDC} = \frac{AD}{DC},$$

$$\frac{\text{пл } \triangle ADB}{\text{пл } \triangle BDC} = \frac{AB \cdot BD \cdot \sin \alpha}{BC \cdot BD \cdot \sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta};$$



Фиг. 2.

отсюда следует:

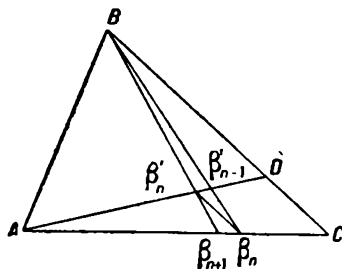
$$\frac{AD}{DC} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad (4)$$

Дан треугольник ABC (фиг. 3). Отложим на стороне BC отрезок $BD=AB$ и соединим A с D . Докажем следующую теорему: прямая $B\beta_n$, делящая сторону AC в отношении n -х степеней прилежащих сторон, делит отрезок AD в отношении $(n-1)$ -х степеней тех же сторон, т. е. если

$$\frac{A\beta_n}{\beta_n C} = \frac{c^n}{a^n},$$

то

$$\frac{A\beta'_{n-1}}{\beta'_{n-1} D} = \frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}.$$



Фиг. 3.

Действительно, на основании первой леммы имеем:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

На основании второй леммы получаем:

$$\frac{A\beta'_{n-1}}{\beta'_{n-1} D} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

Легко доказать и обратную теорему: прямая, делящая отрезок AD в отношении n -х степеней прилежащих сторон AB и BC , делит сторону AC в отношении $(n+1)$ -х степеней.

Доказанная теорема дает возможность переходить от «прямых n » к «прямым $n+1$ », а обратная теорема — от «прямых n » к «прямым $n-1$ ». Пусть $B\beta_n$ (фиг. 3) — «прямая n ». Проводим из точки β_n прямую $\beta_n \beta'_n$ параллельно BC до пересечения в точке β'_n прямой AD .

$$\frac{A\beta'_n}{\beta'_n D} = \frac{A\beta_n}{\beta_n C} = \frac{c^n}{a^n}.$$

Прямая, исходящая из вершины B и проходящая через точку β_n , является «прямой $n+1$ ».

Интересны частные случаи.

Прямая, делящая сторону в отношении нулевых степеней прилежащих сторон, есть медиана. Указанное построение дает возможность переходить от медианы к биссектрисе; от биссектрисы к симедиане — прямой, делящей сторону треугольника в отношении квадратов прилежащих сторон.

Итак, задача о построении интересовавших нас прямых разрешена. Рассмотрим некоторые свойства этих прямых.

1. Из леммы первой непосредственно следует, что «прямая n » является геометрическим местом точек, расстояния от которых до прилежащих сторон треугольника пропорциональны $(n-1)$ -м степеням прилежащих сторон.

Действительно, пусть $B\beta_n$ — «прямая n » (фиг. 1). Из произвольной точки D этой прямой опустим перпендикуляры на стороны.

$$DK \perp AB; \quad DK = BD \sin (KBD),$$

$$DL \perp BC; \quad DL = BD \sin (LBD),$$

следовательно,

$$\frac{DK}{DL} = \frac{\sin (KBD)}{\sin (LBD)} = \frac{c^{n-1}}{a^{n-1}}.$$

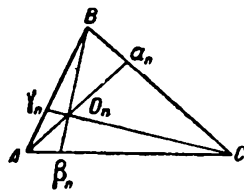
2. Из теоремы Чебы следует, что прямые, исходящие из вершин треугольника и делящие противоположные стороны в отношении n -х степеней прилежащих сторон, пересекаются в одной точке.

Пусть $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ — основания «прямых n », соответственно выходящих из вершин A, B, C (фиг. 4). Тогда имеем:

$$\frac{A\beta_n}{\beta_n C} = \frac{c^n}{a^n}; \quad \frac{C\alpha_n}{\alpha_n B} = \frac{b^n}{c^n}; \quad \frac{B\gamma_n}{\gamma_n A} = \frac{a^n}{b^n},$$

откуда

$$\frac{A\beta_n \cdot C\alpha_n \cdot B\gamma_n}{\beta_n C \cdot \alpha_n B \cdot \gamma_n A} = 1. \quad (5)$$



Фиг. 4.

Равенство (5) показывает, что «прямые n », проведенные из вершины треугольника, пересекаются в одной точке.

3. Точку пересечения «прямых n » будем обозначать через O_n . Определим расстояние от точки O_n до сторон a, b, c треугольника. Пусть эти расстояния соответственно выражаются через x, y, z . Тогда

$$\frac{x}{a^{n-1}} = \frac{y}{b^{n-1}} = \frac{z}{c^{n-1}},$$

$$\frac{ax}{a^n} = \frac{by}{b^n} = \frac{cz}{c^n} = \frac{ax + by + cz}{a^n + b^n + c^n} = \frac{2S}{a^n + b^n + c^n},$$

де S — площадь треугольника.

Отсюда

$$x = \frac{2Sa^{n-1}}{a^n + b^n + c^n} = \frac{h_n a^n}{a^n + b^n + c^n}. \quad (6)$$

Рассмотрим частные случаи. Расстояние от точки O_0 (точка пересечения медиан) до сторон треугольника получим, положив в равенстве (6) $n = 0$:

$$x = \frac{h_n}{3}.$$

Расстояние от точки O_1 (точка пересечения биссектрис) до сторон треугольника

$$x = \frac{2S}{2p} = r,$$

где r — радиус круга, вписанного в треугольник.

При $n = 2$ и $a^2 = b^2 + c^2$ имеем:

$$x = \frac{ha^2}{2a^2} = \frac{h}{2}.$$

Следовательно, в прямоугольном треугольнике симедианы пересекаются на середине высоты, опущенной из вершины прямого угла.

Итак, точка пересечения симедиан прямоугольного треугольника находится на средней линии треугольника, параллельной большей стороне.

В заключение решим такую задачу: стороны треугольника выражаются целыми числами. Можно ли найти такое целое n , при котором «прямые n » пересекаются на средней линии треугольника, параллельной большей стороне. Исключив случай прямоугольного треугольника, мы должны дать отрицательный ответ: ни при каком целом n «прямые n » не могут пересечься на средней линии, параллельной большей стороне треугольника.

Действительно, пусть $x = \frac{h}{2}$, тогда из равенства (6) имеем:

$$\frac{h_n}{2} = \frac{h_n a^n}{a^n + b^n + c^n},$$

откуда

$$a^n = b^n + c^n. \quad (7)$$

На основании теоремы Ферма заключаем, что равенство (7) не имеет места ни при каком целом n ($n = 1$ исключается, так как a , b и c — стороны треугольника, а $n = 2$ исключено по условию¹⁾).

¹⁾ Решение этой задачи основано на теореме Ферма, общего доказательства которой, как известно, до сих пор не существует. Поэтому изложенное решение можно считать справедливым только для тех значений n , для которых теорема Ферма доказана.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ВИЛЬСОНА

А. В. (Москва)

1. Известная теорема Вильсона: *если p — простое число, то $(p-1)! + 1$ кратно p* , имеет обширную литературу, которая вплоть до последнего времени продолжает пополняться. О ней писали Варинг, Лагранж, Эйлер, Гаусс, Штейнер, Кэли, Дирихле, Кронекер, Риччи; здесь упомянуты имена только наиболее выдающихся математиков. Из геометрических доказательств этой теоремы по своей простоте и наглядности выделяется доказательство, приводимое Арт. Кэли (Cayley Art., *Messenger of Mathematics*, 1883, XII, стр. 41; *Math. Pap.*, t. XII, n° 807; *Mathesis* (2), VII, 1897).

2. Пусть n — простое число. Перенумеруем вершины правильного n -угольника в порядке обхода контура: 1, 2, 3, ..., n . Если соединим их диагоналями последовательно через одну, потом через две, через три и т. д., то, кроме правильного многоугольника 123 ..., получим еще $(n-2)$ многоугольников 135 ..., 147 ..., 159 ... и т. д. Эти $(n-1)$ многоугольников попарно тождественны, так как при соединении вершин через k и через $(n-k-2)$ получаем тождественные многоугольники. Число различных правильных многоугольников, полученных этим путем, равно $\frac{1}{2}(n-1)$.

3. Если соединим вершины в каком-либо другом порядке, например в порядке 13245 ..., то получим неправильный многоугольник; повертывая этот многоугольник так, чтобы номера его вершин заменялись следующими по порядку числами (число n заменяется при этом единицей), получим n неправильных многоугольников. В вышеуказанном примере это будут многоугольники 13245 ..., 24356 ..., 35467 ..., ..., 2134 ... Если таким путем образуем все возможные неправильные многоугольники, то число их будет кратно n ; но, как и в случае правильных многоугольников, они по два тождественны; именно две последовательности вершин, прямая и обратная, дают один и тот же многоугольник.

4. Если в последовательности вершин 123 ... сделать все возможные перестановки $(n-1)$ вершин 23 ..., то получим все возможные (правильные и неправильные) многоугольники; их число будет равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) = (n-1)!$; они опять будут попарно тождественны, так что действительное их число $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)$.

5. Сопоставляя результаты (2) и (4), видим, что число неправильных многоугольников будет равно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) - \frac{1}{2}(n-1) &= \frac{1}{2}[1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) + 1 - n] = \\ &= \frac{1}{2}[(n-1)! + 1 - n]. \end{aligned}$$

По (3) это число должно делиться на n ; следовательно $(n-1)! + 1$ кратно n .

О РАЦИОНАЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКАХ

И. И. Чистяков (Москва)

1. Вопрос о рациональных треугольниках, т. е. таких, стороны и площадь которых могут быть выражены рациональными и, в частности, целыми числами, представляет значительный научно-педагогический интерес, так как позволяет установить связь между двумя основными отделами математики: геометрией и алгеброй. Имеет он и большое историческое значение, ибо еще Пифагор и Платон в древней Греции занимались им и дали впервые способы для выражения сторон рациональных *прямоугольных* треугольников. Позднее этим же вопросом интересовались индусские и арабские ученые, которые получили соответствующие формулы и для косоугольных треугольников, а также для некоторых видов четырехугольников. Этот интерес унаследовали и сменившие арабских ученых средневековые и позднейшие европейские математики. Связь этого вопроса с весьма важными отделами теории чисел имела своим последствием то, что его должны были касаться ученые, занимавшиеся неопределенным анализом и теорией чисел. Поэтому вопрос о рациональных треугольниках имеет весьма большую литературу. Однако он является, с одной стороны, настолько разносторонним и богатым содержанием, а с другой — сравнительно легким для разработки элементарными средствами, что статьи, заметки и задачи, к нему относящиеся, не перестают появляться на страницах математических хрестоматий и журналов. В общем он представляет превосходный материал для занятий учащихся в математических кружках, почему ему и посвящается настоящая статья.

Следует, однако, заметить, что особенно разработанной является статья о рациональных *прямоугольных*, или так называемых *пифагоровых* треугольниках; вопрос же о формулах для *косоугольных* рациональных треугольников значительно менее освещен ввиду несколько большей степени его трудности. В русских учебниках алгебраический вывод формул для рациональных косоугольных треугольников имеется в геометрии Давидова и в сборнике алгебраических задач Верещагина. Такой же характер имеет и вывод соответствующих формул, данный Бахманом в книге *Васһтапп: Die höhere Zahlentheorie, Bd. II, 1910* (перев. в журнале «Математическое образование», 1916 г.); кроме того, он отличается большою сложностью. В настоящей статье предлагается вывод формул для рациональных косоугольных треугольников, отличающийся большою простотой и основанный на геометрических соображениях; кроме того, здесь же рассматриваются частные случаи общего вопроса, могущие представить алгебраический и геометрический интерес.

2. Предлагаемый вывод основывается на свойствах отрезков, на которые разделяются стороны треугольника точками касания вписанной в этот треугольник окружности. Пусть (см. чертеж) в

косоугольный треугольник ABC со сторонами a, b, c вписана окружность радиуса r , касающаяся сторон треугольника в точках K, L, M ; называя отрезки от вершин треугольника до точек касания соответственно через x, y, z , имеем:

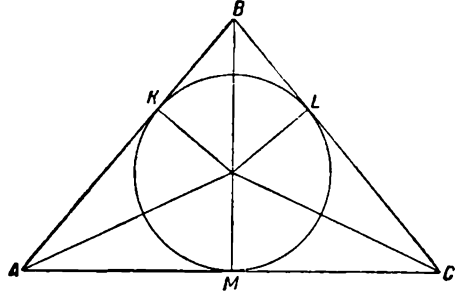
$$AK = AM = x;$$

$$BK = BL = y;$$

$$CL = CM = z.$$

Обозначая далее периметр треугольника $2p$, имеем:

$$x + y + z = p;$$



а так как в то же время, как видно из чертежа:

$$x + y = c; \quad x + z = b; \quad y + z = a,$$

то для отрезков x, y, z получим обычно приводимые в курсах тригонометрии выражения:

$$x = p - a; \quad y = p - b; \quad z = p - c.$$

Исследуем свойства этих отрезков; пусть для определенности

$$A < B < C;$$

тогда и

$$a < b < c,$$

т. е.

$$y + z < x + z < x + y,$$

или

$$z < y < x,$$

следовательно, рассматриваемые отрезки идут по величине в обратном порядке сравнительно со сторонами и углами. Легко видеть, далее, что углы, получающиеся от соединения центра вписанного круга с вершинами треугольника — все тупые, ибо если бы, например, угол AOC был прямой, то $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C = 90^\circ$ и стороны AB и CB были бы параллельны, а если бы он был острым, то они расходились бы. Поэтому, очевидно, $r < \sqrt{zy}$, и подавно $r < \sqrt{xy}$ и $r < \sqrt{xz}$, откуда $r < \sqrt[3]{xyz}$.

Ясно, далее, что если $r < z$, то треугольник будет остроугольным; при $r = z$ — прямоугольным и при $r > z$ — тупоугольным. Заметим, наконец, что любым отрезкам x, y, z непременно будет соответствовать определенный треугольник, ибо сумма двух сторон его всегда будет больше третьей, что следует из условия:

$$c < a + b, \text{ или } (x + y) < (y + z) + (x + z),$$

но последнее неравенство всегда справедливо.

3. Выражая двояким образом площадь треугольника, имеем:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = r \cdot p,$$

или

$$\sqrt{pxyz} = rp,$$

откуда

$$xyz = (x + y + z) \cdot r^2. \quad (I)$$

Этим уравнением мы и воспользуемся для вывода формул сторон рациональных треугольников. Начнем с частного случая — прямоугольного треугольника, тогда $C = 90^\circ$ и $r = z$. Уравнение (I) примет тогда вид:

$$xyz = (x + y + z) z^2,$$

или

$$xy = (x + y + z) z,$$

откуда

$$x = \frac{yz + z^2}{y - z}. \quad (a)$$

Поэтому для определения отрезков сторон рационального прямоугольного треугольника можно взять произвольной величины отрезки z и $y > z$, тогда x определится по формуле (a). Величина сторон прямоугольного треугольника определится при этом по формулам:

$$a = y + z; \quad b = x + z = \frac{2yz}{y - z} \quad \text{и} \quad c = x + y = \frac{y^2 + z^2}{y - z}. \quad (b)$$

Например, при $z = 1$ и $y = 2$ имеем: $x = 3$ и $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, т. е. так называемый египетский прямоугольный треугольник. При $z = 3$, $y = 5$ получим $x = 12$ и $a = 8$, $b = 15$, $c = 17$ и т. д. Вместо найденных выражений для сторон треугольника (b) можно взять величины, им пропорциональные:

$$a = k(y + z); \quad b = k \frac{2yz}{y - z}; \quad c = k \frac{y^2 + z^2}{y - z}.$$

Полагая $k = y - z$, получим известные из древности формулы, выражающие стороны прямоугольного треугольника в целых числах:

$$a = y^2 - z^2; \quad b = 2yz; \quad c = y^2 + z^2,$$

где y и z — произвольные целые числа. При $y - z = 1$ найдем выражения:

$$a = 2z + 1; \quad b = 2z^2 + 2z; \quad c = 2z^2 + 2z + 1,$$

которые приписываются Пифагору,

Ввиду практической важности знания чисел, выражающих стороны рациональных прямоугольных треугольников, например, при составлении геометрических задач на вычисление, приводим таблицу их, не превышающих 100:

3, 4, 5	9, 40, 41	16, 63, 65	36, 77, 85
5, 12, 13	11, 60, 61	20, 21, 29	39, 80, 89
8, 15, 17	12, 35, 37	28, 45, 53	48, 55, 73
7, 24, 25	13, 84, 85	33, 56, 65	65, 72, 97

Пусть требуется найти стороны рационального прямоугольного треугольника при условии, что они составляют арифметическую прогрессию. Тогда $c - b = b - a$, или

$$\frac{y^2 + z^2}{y - z} - \frac{2yz}{y - z} = \frac{2yz}{y - z} - (y + z),$$

или по упрощении:

$$2y^2 = 4yz; \quad y = 2z,$$

откуда

$$a = 3z^2; \quad b = 4z^2; \quad c = 5z^2.$$

т.е. стороны таких треугольников пропорциональны сторонам египетского треугольника.

4. Переходя к общему случаю, из уравнения (I) имеем:

$$x = \frac{(y + z)r^2}{yz - r^2}. \quad (II)$$

Поэтому, беря отрезки y , z и r произвольно, но при условии $r < \sqrt{yz}$, мы получим по формуле (II) величину отрезка x , а затем попарным сложением чисел x , y , z найдем стороны рационального треугольника.

Так, при $z = 6$, $y = 7$ и $r = 4$ найдем $x = \frac{13 \cdot 16}{42 - 16} = 8$ и $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

При $r = \frac{3}{2}$, $z = 3$, $y = 12$ получим $x = 1$ и $a = 15$, $b = 4$, $c = 13$.

Эти два примера были известны еще в древности.

Делая $z = 1$, $y = 2$ и $r = \frac{4}{3}$, получим: $x = 24$, откуда $a = 3$, $b = 25$, $c = 26$.

Чтобы составить выражения сторон треугольника, нужно сложить попарно отрезки x , y , z ; получим:

$$a = y + z; \quad b = x + z = \frac{y(r^2 + z^2)}{yz - r^2}; \quad c = x + y = \frac{z(r^2 + y^2)}{yz - r^2}.$$

Вместо найденных значений можно взять числа, им пропорциональные:

$$a = k \cdot (y + z); \quad b = k \cdot \frac{y(r^2 + z^2)}{yz - r^2}; \quad c = k \cdot \frac{z(r^2 + y^2)}{yz - r^2}.$$

Полагая $k = yz - r^2$, получим выражения, дающие стороны треугольника в целых числах:

$$a = (y + z)(yz - r^2); \quad b = y(r^2 + z^2); \quad c = z(r^2 + y^2).$$

Давая в этих формулах произвольные значения числам y , z и $r < \sqrt{yz}$, можно получить сколько угодно целых чисел для сторон рациональных треугольников. Однако проще получить сначала отрезки x , y , z , а затем сложением их найти стороны треугольника. При этом вычисления можно вести по такому плану: в выражении $x = \frac{(y+z)r^2}{yz-r^2}$ давать знаменателю $d = yz - r^2$ значения 1, 2, 3, 4, ...; для каждого значения d можно полагать $r = 1, 2, 3, 4, \dots$, тогда y и z можно найти из выражения $yz = r^2 + d$ путем разложения его на множители. Подставляя эти значения вместо y и z в формулу для x , выбираем из получающихся чисел целые значения; при получении же дробных значений для x увеличиваем пропорционально x , y , z так, чтобы получились целые числа. Чтобы при этом не получать прямоугольных треугольников, следует устранить из рассмотрения те случаи, когда один из отрезков x , y , z равен r .

Пусть, например, $d = 4$. Полагая $r = 1$, найдем $yz = 5$, откуда возможно лишь $z = 1$, $y = 5$, что дает прямоугольный треугольник. При $r = 2$ найдем $yz = 8$; полагая $z = 1$, $y = 8$, получим $x = 9$ и $a = 9$, $b = 10$, $c = 17$.

Если же взять $y = 4$, а $z = 2$, то получим прямоугольный треугольник.

При $r = 3$ найдем $yz = 13$, откуда $z = 1$, $y = 13$, что для x дает $\frac{63}{2}$. Удваивая полученные числа, имеем:

$$x = 63, \quad y = 26, \quad z = 2 \quad \text{и} \quad a = 28, \quad b = 65, \quad c = 89.$$

При $r = 4$ $yz = 20$. Полагая $z = 1$, $y = 20$, имеем $x = 84$, следовательно, $a = 21$, $b = 85$, $c = 104$; если же взять $z = 2$, $y = 10$, то $x = 48$ и $a = 12$, $b = 50$, $c = 58$, что по сокращении дает $a = 6$, $b = 25$, $c = 29$. Наконец, при $z = 4$, $y = 5$ получился бы прямоугольный треугольник.

Поступая изложенным образом, можно получить сколь угодно большую таблицу чисел для сторон рациональных треугольников.

Наиболее полная таблица чисел, выражающих стороны рациональных косоугольных треугольников и не превышающих 100, была помещена в 1914 г. в журнале «*Mathematical questions and solutions*», Vol. XXV; в 1915 г. к ней было сделано дополнение, после чего число названных треугольников доведено до 140. Однако это число не является полным, и, пользуясь вышеуказанным методом, нам удалось получить ряд треугольников, не приведенных в упомянутой таблице.

Приводим таблицу первых 115 рациональных треугольников.

3, 25, 26	13, 30, 37	17, 87, 100	26, 35, 51	35, 53, 66
4, 13, 15	13, 40, 45	19, 20, 37	26, 51, 55	35, 65, 82
4, 51, 53	13, 37, 40	19, 60, 73	26, 51, 73	35, 78, 97
5, 29, 30	13, 40, 51	20, 19, 37	26, 52, 63	36, 61, 65
5, 51, 52	13, 68, 75	20, 37, 51	26, 73, 97	37, 39, 52
6, 25, 29	13, 84, 95	20, 51, 65	27, 29, 52	37, 72, 91
7, 15, 20	14, 61, 65	21, 41, 50	28, 65, 89	37, 91, 96
7, 65, 68	15, 26, 37	21, 61, 68	29, 35, 48	38, 65, 87
8, 29, 35	15, 28, 41	21, 82, 89	29, 52, 75	39, 41, 50
9, 10, 17	15, 34, 35	21, 89, 100	29, 60, 85	39, 58, 95
9, 65, 70	15, 37, 44	22, 85, 91	29, 65, 68	39, 62, 85
9, 73, 80	15, 41, 52	24, 35, 53	29, 75, 92	39, 85, 92
10, 17, 21	15, 52, 61	25, 29, 36	29, 52, 69	40, 51, 77
10, 35, 39	16, 25, 39	25, 39, 40	31, 68, 87	41, 50, 73
11, 13, 20	16, 63, 65	25, 39, 56	32, 53, 75	41, 50, 89
11, 25, 30	17, 25, 26	25, 33, 52	33, 34, 65	41, 51, 58
11, 60, 61	17, 25, 28	25, 38, 51	33, 41, 58	41, 60, 95
11, 90, 97	17, 28, 39	25, 34, 39	33, 58, 85	41, 66, 85
12, 17, 25	17, 39, 44	25, 48, 55	34, 55, 87	41, 84, 85
12, 35, 37	17, 40, 41	25, 51, 52	34, 61, 75	43, 61, 68
12, 55, 65	17, 55, 60	25, 51, 74	34, 55, 87	44, 75, 97
13, 14, 15	17, 65, 80	25, 63, 74	35, 44, 75	51, 52, 53
13, 20, 21	17, 89, 90	25, 74, 77	35, 52, 73	65, 87, 88

5. Рассматривая приведенную таблицу, мы видим, что в некоторых случаях стороны рационального треугольника составляют арифметическую прогрессию или даже выражаются тремя последовательными целыми числами, как в известном треугольнике со сторонами 13, 14, 15. Посмотрим, как получить такие треугольники. Легко видеть, что если стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию, то ее же составляют и отрезки x , y , z . Действительно, из соотношения

$$c - b = b - a$$

следует:

$$(x + y) - (x + z) = (x + z) - (y + z),$$

или

$$y - z = x - y; \quad y = \frac{x + z}{2}.$$

Подставляя в формулу (I) вместо y это его значение, имеем:

$$xz \left(\frac{x + z}{2} \right) = \left(x + z + \frac{x + z}{2} \right) r^2, \quad \text{т. е. } xz = 3r^2. \quad (с)$$

Поэтому, давая r произвольные значения, можно разложением на множители найти числа z и x , а затем и $y = \frac{x + z}{2}$.

Например, полагая $r = 2$, имеем $xz = 12$; пусть $z = 1$, $x = 12$, тогда $y = \frac{13}{2}$. Беря удвоенные числа, получим целые значения

$x_1 = 24$, $y_1 = 13$, $z_1 = 2$ и $a = 15$, $b = 26$, $c = 37$. Если же положим $z = 3$, $x = 4$, то $y = \frac{7}{2}$, или, удваивая, $z_1 = 6$, $x_1 = 8$, $y_1 = 7$ и $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

При $r = 3$ имеем $xz = 27$; делая $z = 1$, $x = 27$, получаем $x = 14$, откуда $a = 15$, $b = 28$, $c = 41$.

Если требуется, чтобы стороны треугольника выражались тремя последовательными числами, то в равенстве (b) надо положить $z = x - 2$, откуда имеем:

$$x(x-2) = 3r^2; \quad x^2 - 2x - 3r^2 = 0 \quad \text{и} \quad x = 1 + \sqrt{1 + 3r^2}.$$

Пологая $r = 1, 2, 3, \dots$ и выбирая те значения r , при которых корень извлекается, получим искомые последовательные целые числа. Так, при $r = 1$ имеем $x = 3$ и $z = 1$, $y = 2$; следовательно, $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, т. е. египетский треугольник. При $r = 4$ получим $x = 8$, $z = 6$, $y = 7$ и $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

При $r = 15$, $x = 1 + \sqrt{676} = 27$, следовательно, $z = 25$, $y = 26$ и $a = 51$, $b = 52$, $c = 53$.

6. В заключение рассмотрим тот интересный случай, когда периметр и площадь треугольника выражаются одним и тем же числом. В этом случае основное уравнение (I) примет вид:

$$\sqrt{(x+y+z)xyz} = 2(x+y+z),$$

откуда видно, что в таких треугольниках $r = 2$.

Определяя x , имеем:

$$x = \frac{(y+z) \cdot 4}{yz - 4}.$$

По этой формуле, давая y и z произвольные значения, можно найти сколько угодно рациональных треугольников, удовлетворяющих поставленному условию.

Например, при $y = 3$ и $z = 4$ получим: $x = 3\frac{1}{2}$ и $a = 7$, $b = 7\frac{1}{2}$, $c = 6\frac{1}{2}$. Площадь и периметр треугольника выразятся числом 21.

Исключительно целые значения для x получатся, как легко убедиться, только в следующих случаях:

1) При $yz - 4 = 1$, откуда $yz = 5$, $y = 5$, $z = 1$ и $x = 24$, а следовательно, $a = 6$; $b = 25$; $c = 29$.

2) При $yz - 4 = 2$; тогда $yz = 6$; пусть $y = 6$, $z = 1$: тогда $x = 4$ и стороны треугольника 7, 15, 20.

3) Если же в предыдущем случае положим $y = 3$, $z = 2$, то получим прямоугольный треугольник со сторонами 5, 12, 13.

4) При $yz - 4 = 4$, $yz = 8$; пусть $y = 8$, $z = 1$, тогда $x = 9$ и $a = 9$, $b = 10$, $c = 17$.

5) Если же в предыдущем случае $y = 4$, $z = 2$, то $x = 6$, имеем прямоугольный треугольник со сторонами 6, 8 и 10.

Легко видеть, что кроме рассмотренных случаев вопрос о рациональных треугольниках представляет вообще богатый материал как для алгебраического, так и для геометрического исследования.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ СУММИРОВАНИЕ ОДНОГО РЯДА

Р. Н. Бончковский (Москва)

Задача состоит в доказательстве формулы

$$\begin{aligned}
 S &= 1 \cdot 2 \dots k + 2 \cdot 3 \dots (k+1) + 3 \cdot 4 \dots (k+2) + \dots \\
 &\quad \dots + (n-k+1)(n-k+2) \dots (n-1)n = \\
 &= \frac{(n-k+1)(n-k+2) \dots (n-1)n(n+1)}{k+1}
 \end{aligned}$$

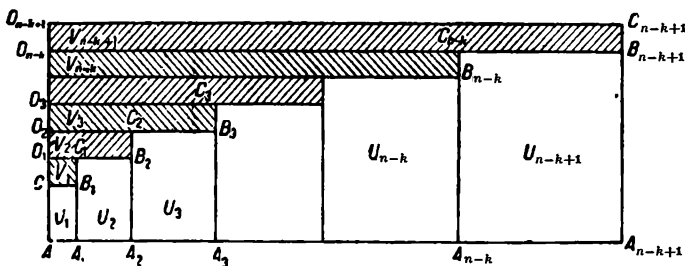
(здесь k и n — целые положительные числа).Мы воспользуемся методом математической индукции. Для $k=1$ формула принимает вид:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$$

это есть известная формула суммы натурального ряда чисел от 1 до n .Теперь докажем, что формула (1) имеет место для любого значения k , если она верна для меньших его значений.

Общий член ряда

$$u_r = r(r+1) \dots (r+k-1) \quad (r = 1, 2, \dots, n-k+1)$$

можно рассматривать как площадь прямоугольника с основанием $a_r = r(r+1) \dots (r+k-2)$ и высотой $b_r = r+k-1$.

Отложим на некоторой прямой в последовательном порядке отрезки $AA_1 = a_1$, $A_1A_2 = a_2$, ..., $A_{n-k}A_{n-k+1} = a_{n-k+1}$ и на каждом из них как на основании строим соответствующие прямоугольники $u_1, u_2, \dots, u_{n-k+1}$ (незаштрихованная часть фигуры). На отрезке AA_{n-k+1} как на основании строим прямоугольник $AD_{n-k+1}C_{n-k+1}A_{n-k+1}$, высота которого $AD_{n-k+1} = n+1$. Очевидно, площадь незаштрихованной части фигуры равна искомой сумме S ряда.

Основание AA_{n-k+1} определится по формуле (1), которая в данном случае применима, так как каждое слагаемое ряда содержит $k-1 < k$ множителей:

$$\begin{aligned} AA_{n-k+1} &= AA_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-k}A_{n-k+1} = 1 \cdot 2 \dots (k-1) + \\ &+ 2 \cdot 3 \dots k + \dots + (n-k+1)(n-k+2) \dots (n-1) = \\ &= \frac{(n-k+1)(n-k+2) \dots (n-1)n}{k}, \end{aligned}$$

и площадь прямоугольника $AD_{n-k+1}C_{n-k+1}D_{n-k+1} = P$ легко определяется:

$$P = AA_{n-k+1} \cdot AD_{n-k+1} = \frac{(n-k+1)(n-k+2) \dots (n-1)n(n+1)}{k}.$$

Остается определить площадь заштрихованной части фигуры. Продолжения верхних оснований прямоугольников $u_1, u_2, \dots, u_{n-k+1}$ разбивают ее на прямоугольные полосы, ширина каждой из которых равна единице. Назовем их площади в последовательном порядке $v_1, v_2, \dots, v_{n-k+1}$. Площадь полосы численно равна ее длине, т. е.:

$$\begin{aligned} v_r &= D_rC_r = AA_r = AA_1 + AA_2 + \dots + A_{r-1}A_r = \\ &= 1 \cdot 2 \dots (k-1) + 2 \cdot 3 \dots k + \dots + r(r+1) \dots (r+k-2) = \\ &= \frac{r(r+1) \dots (r+k-2)(r+k-1)}{k} = \frac{u_r}{k} \quad (r = 1, 2, \dots, n-k+1). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sum_{r=1}^{n-k+1} v_r = \frac{1}{k} \sum_{r=1}^{n-k+1} u_r = \frac{S}{k},$$

и, следовательно,

$$S + \frac{1}{k}S = P,$$

или

$$S = \frac{k}{k+1}P,$$

т. е.:

$$\begin{aligned} S &= \frac{k}{k+1} \cdot \frac{(n-k+1)(n-k+2) \dots (n-1)n(n+1)}{k} = \\ &= \frac{(n-k+1)(n-k+2) \dots n(n+1)}{k+1}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ОБ ОПИСАННЫХ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКАХ ¹⁾

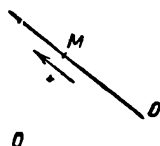
П. Кароннэ

В этой заметке мы предполагаем решить следующую задачу: *Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы четырехугольник можно было описать около окружности ²⁾.*

Пусть в плоскости даны центр ориентации O (фиг. 1) и какая-либо прямая D , не проходящая через O .

Мы говорим, что подвижная точка M , перемещающаяся по этой прямой, описывает *положительный* путь, если точка O находится от нее слева, и *отрицательный* путь, если точка O находится от нее справа. При этом условии, если A, B, C — три точки на прямой D , имеем:

$$AB + BC + CA = 0;$$

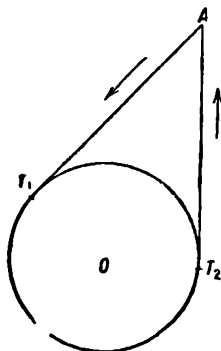


Фиг. 1.

с другой стороны, если AT_1 и AT_2 (фиг. 2) — две касательные, проведенные из A к окружности с центром O , то

$$AT_1 = -AT_2.$$

Пусть четырехугольник описан около окружности с центром O ; обозначим точки касания буквами T_1, T_2, T_3, T_4 , а вершины $A_{12}, A_{23}, A_{34}, A_{41}$ (A_{12} есть пересечение сторон 1 и 2).



Фиг. 2.

Предположим, что точка M описывает четырехугольник, например, в направлении $A_{12} A_{23} A_{34} A_{41}$.

Обозначим через a_1, a_2, a_3, a_4 алгебраическую величину сторон как путей, описанных подвижной точкой M .

При этих обозначениях независимо от формы четырехугольника, имеем:

$$\left. \begin{aligned} A_{12}T_1 &= -A_{12}T_2, \\ A_{23}T_2 &= -A_{23}T_3, \\ A_{34}T_3 &= -A_{34}T_4, \\ A_{41}T_4 &= -A_{41}T_1, \end{aligned} \right\} (1) \quad \begin{aligned} A_{41}T_1 + T_1A_{12} &= a_1, (2) \\ A_{12}T_2 + T_2A_{23} &= a_2, (3) \\ A_{23}T_3 + T_3A_{34} &= a_3, (4) \\ A_{34}T_4 + T_4A_{41} &= a_4, (5) \end{aligned}$$

и, принимая во внимание условия (1), выполним операцию:

$$(2) - (3) + (4) - (5);$$

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 0;$$

получается, что мы можем высказать следующую теорему.

¹⁾ *Journal de Mathématiques élémentaires.*

²⁾ Эта задача была впервые изучена Пито (Pitot) (1725), но неполно; Штейнер (Steiner) в 1846 г. исправил условия, данные Пито. Наконец, Дарбу (M. Darboux) дал очень простое решение этой задачи, основанное на свойствах касательных к эллипсу и гиперболу.

Теорема. Если четырехугольник описан около круга в плоскости, центром ориентации которой является центр круга, то сумма алгебраических величин двух несмежных сторон равна сумме величин двух других сторон.

Теперь мы докажем обратное предположение, которое можно высказать следующим образом:

Обратная теорема. Если дан четырехугольник в плоскости, центр ориентации которой совпадает с центром круга (С), три стороны которого касаются круга, а сумма алгебраических величин двух несмежных сторон которого равна сумме величин двух других сторон, то четырехугольник описан около круга (С).

Действительно, пусть имеем четырехугольник $A_{12} A_{23} A_{34} A_{41}$; предположим, что круг (С) касается сторон 1, 2, 3 в точках T_1, T_2, T_3 . Проведем через $A_{34} A_{41}$, отличающуюся от $A_{34} A_{23}$, которая встречает сторону $A_{41} A_{12}$ в точке A'_{41} .

Четырехугольник $A_{12} A_{23} A_{34} A'_{41}$ описан около круга (С); поэтому по предыдущей теореме имеем:

$$A'_{41} A_{12} - A_{12} A_{23} + A_{23} A_{34} - A_{34} A_{41} = 0$$

и на основании предположения

$$A_{41} A_{12} - A_{12} A_{23} + A_{23} A_{34} - A_{34} A_{41} = 0,$$

или, вычитая второе равенство почленно из первого, получаем:

$$A'_{41} A_{12} - A_{41} A_{12} - A_{34} A'_{41} + A_{34} A_{41} = 0,$$

или

$$A'_{41} A_{41} - A_{34} A'_{41} + A_{34} A_{41} = 0.$$

Это условие выполняется, если A'_{41} совпадает с A_{41} ; оно не будет выполняться, если эти две точки не совпадают, потому что оно показывает, что в треугольнике $A_{34} A_{41} A'_{41}$ алгебраическая сумма трех сторон равна нулю.

Итак, $A_{34} A_{41}$ совпадает с $A_{34} A'_{41}$, т. е. данный четырехугольник описан около круга (С).

Замечание. Если четырехугольник описан около круга и круг касается одной из сторон, то мы говорим, что налицо *внутреннее* касание; если же круг касается продолжения стороны, то мы говорим, что налицо *внешнее* касание.

Легко видеть, что число касаний каждого рода четно.

Действительно, условия (1) дают:

$$\frac{T_1 A_{12}}{T_2 A_{12}} = -1, \quad \frac{T_2 A_{23}}{T_3 A_{23}} = -1,$$

$$\frac{T_3 A_{34}}{T_4 A_{34}} = -1, \quad \frac{T_4 A_{41}}{T_1 A_{41}} = -1,$$

и мы получаем:

$$\frac{T_1 A_{12}}{T_1 A_{41}} \cdot \frac{T_4 A_{41}}{T_4 A_{34}} \cdot \frac{T_3 A_{34}}{T_3 A_{23}} \cdot \frac{T_2 A_{23}}{T_2 A_{12}} = 1. \quad (6)$$

Это равенство показывает, что в левой части число отрицательных отношений может быть равно 0, 2 или 4.

Вследствие этого, если мы обозначим через e_k или i_k внешнюю или внутреннюю точку касания, то для касаний сторон четырехугольника мы не можем иметь других расположений, кроме следующих:

$$e_1 e_2 e_3 e_4, \quad (7)$$

$$e_1 i_2 e_3 i_4, \quad (8)$$

$$e_1 e_2 i_3 i_4, \quad (9)$$

$$i_1 i_2 i_3 i_4. \quad (10)$$

Построение четырехугольника, описанного около окружности

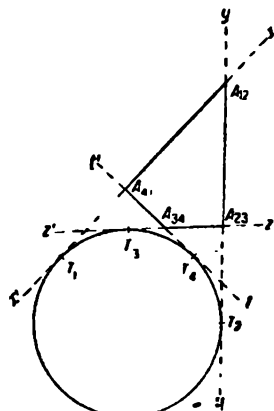
Существование описанного четырехугольника очевидно, поскольку к окружности можно провести четыре касательные. Мы хотим показать, что все четыре расположения (7), (8), (9), (10) возможны, показав, как осуществляется одно из них, например расположение (7).

Начертим окружность и две какие-либо непараллельные касательные $x'T_1x$, $y'T_2y$ (фиг. 3). На этих касательных расположены две смежные стороны четырехугольника, стороны 1 и 2.

Их точка пересечения будет вершиной A_{12} . По предположению, T_1 и T_2 являются внешними точками касания, и сторона 3 будет лежать на касательной $z'T_3z$, встречающей полупрямую T_2y и отрезок T_2A_{12} . (Принимая во внимание направление сторон $A_{12}A_{23}$, т. е. yy' , мы не уменьшим общности.)

Точки касания T_1 и T_3 являются по предположению точками внешнего касания, и сторона 4 будет лежать на касательной $t'T_4t$, встречающей полупрямые T_1x и T_1z . В конце концов мы получаем четырехугольник $A_{12}A_{23}A_{34}A_{41}$, который имеет с окружностью четыре точки касания.

Рассуждая подобным образом, можно осуществить расположения (8), (9) и (10) и заключить, что всего получится пять следующих видов четырехугольников:



Фиг. 3.

Расположение $e_1 e_2 e_3 e_4$ (фиг. 4).

Назовем $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ арифметические значения длин сторон; условие

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4$$

дает:

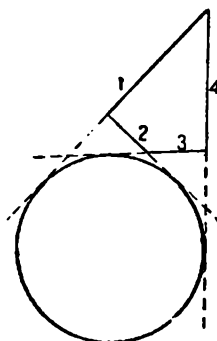
$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4.$$

Расположение $e_1 i_2 e_3 i_4$ (фиг. 5).

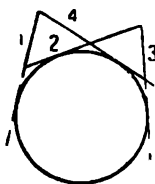
В этом случае между длинами сторон получим зависимость:

$$\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4.$$

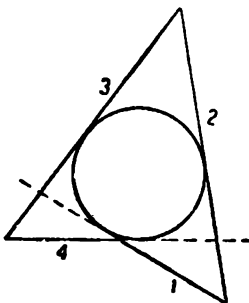
Расположение $e_1 i_2 i_3 e_4$ (фиг. 6).



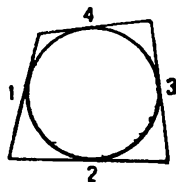
Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

В этом случае четырехугольник имеет вид наконечника копья. Кроме того, окружность может оказаться вписанной или невписанной.

В первом случае

$$\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4,$$

во втором случае

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4.$$

Расположение $i_1 i_2 i_3 i_4$ (фиг. 7).

Четырехугольник будет выпуклым и

$$\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4.$$

ЗАМЕТКА О ТРЕТЬЕМ СЛУЧАЕ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ ¹⁾

Доказательство третьего случая равенства треугольников можно, как и в первых двух случаях, провести методом наложения.

¹⁾ *Journal de Mathématiques élémentaires.*

Пусть ABC , $A'B'C'$ — два треугольника, стороны которых попарно равны друг другу.

Накладываем треугольник $A'B'C'$ на треугольник ABC так, чтобы $B'C'$ совпало с BC , и определим положение точки A' .

Ясно, что эта точка будет или внутри или вне треугольника ABC .

Предположим, что она упадет внутри треугольника ABC . Тогда по известной теореме

$$AB + AC > A'B + A'C.$$

Но

$$A'B = AB \text{ и } A'C = AC$$

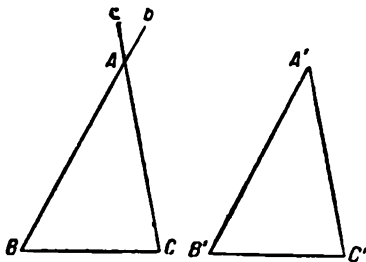
и поэтому это неравенство невозможно.

Предположим, что точка A' упадет вне треугольника ABC , или в углу bAc , или в углах bAC , cAB .

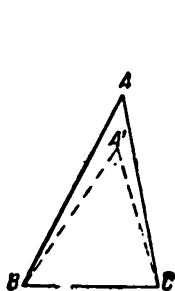
В первом из этих случаев будем иметь:

$$AB + AC < A'B + A'C,$$

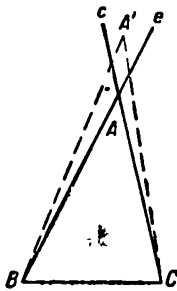
что невозможно.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

В двух других случаях пусть будет A' положение этой точки. Будем иметь:

$$AB < AI + IB, \quad A'C < A'I + IC,$$

или

$$AB + A'C < AI + IC + A'I + IB$$

и

$$AB + A'C < AC + A'B.$$

Но

$$AB = A'B \text{ и } AC = A'C,$$

и это неравенство невозможно.

Итак, A не может быть ни вне, ни внутри треугольника; следовательно, она упадет на одну из сторон. Пусть, например, она упадет на AC . Но $A'C = AC$, и A' упадет в точку A , и треугольники совпадут.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ОБЩАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ПРОИЗВОДНОЙ n -ГО ПОРЯДКА СТЕПЕНИ НЕКОТОРОЙ ФУНКЦИИ

В. А. Кудрявцев (Москва)

Вопрос о получении общей формулы производной n -го порядка функции от функции был предметом исследования многих математиков. Формулу эту можно встретить в курсах Шломилха (Schlömilch)¹⁾, Лорана (Laurent)²⁾, Чезаро (Cesaro)³⁾ и других. У большинства авторов формула имеет тот недостаток, что нахождение производной n -го порядка функции от некоторой функции u независимого переменного x сводится к нахождению производной n -го порядка от степени u . Что же касается общей формулы для производной n -го порядка от степени u , то вопрос остается открытым. Вопрос решен до конца проф. А. П. Поляковым⁴⁾, который дает совершенно общую формулу для производной n -го порядка функции от функции в виде детерминанта, свободную от указанных недостатков. Тем не менее эта задача продолжала интересовать математиков, и совсем недавно, именно в 1929 г., т. е. через 20 лет после работы проф. А. П. Полякова, появилась заметка немецкого математика Перрона (Perron)⁵⁾, который дает вывод формулы Шватта (Schwatt) выражения производной n -го порядка функции от функции. Формула Перрона—Шватта обладает тем же недостатком, как и формулы, помещенные в курсах Шломилха и Лорана, т. е. приводит общую задачу к частной, именно к нахождению производной n -го порядка от степени u^α функции u . Вывод Перрона формулы Шватта чрезвычайно прост, он занимает всего одну с небольшим страницу. Приведем эту формулу. Она такова:

$$\frac{d^n f[u(x)]}{dx^n} = \sum_{h=1}^n \frac{1}{h!} f^{(h)}[u(x)] \sum_{\alpha=1}^h \binom{h}{\alpha} [-u(x)]^\alpha \cdot \frac{d^\alpha [u(x)^\alpha]}{dx^\alpha},$$

¹⁾ Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, Bd. II.

²⁾ Laurent, Traité d'Analyse, Tome I.

³⁾ Чезаро, Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно-малых.

⁴⁾ Поляков, Математический сборник, т. 27, 1909, стр. 195, теорема V.

⁵⁾ Perron, Mathematische Zeitschrift, 1929, Bd. 31. I Heft, стр. 159.

отсюда видно, что нахождение $\frac{d^n f[u(x)]}{dx^n}$ приводится к нахождению

$$\frac{d^n [u(x)^\alpha]}{dx^n}.$$

В настоящей статье дается простой вывод общей формулы для производной $\frac{d^n [u(x)^\alpha]}{dx^n}$. Таким образом на предлагаемую статью можно смотреть как на дополнение формулы Перрона—Шватта.

Пусть u — некоторая функция $u(x)$ независимого переменного x . Возьмем функцию

$$y = u^\alpha, \quad (1)$$

где α — некоторое вещественное число. Наша задача — вычислить $y^{(n)}$. Логарифмируя выражение (1), получим:

$$\ln y = \alpha \ln u.$$

Дифференцируя полученное выражение, имеем:

$$\frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{u'}{u},$$

или

$$uy' = \alpha u' y. \quad (2)$$

Возьмем производную n -го порядка по x от обеих частей (2). Будем иметь:

$$(uy')^{(n)} = \alpha (u'y)^{(n)}. \quad (3)$$

Применяя к правой и левой части уравнения (3) формулу Лейбница¹⁾ для выражения производной n -го порядка от произведения двух функций, получим:

$$\begin{aligned} uy^{(n+1)} + \binom{n}{1} u'y^{(n)} + \binom{n}{2} u''y^{(n-1)} + \binom{n}{3} u'''y^{(n-2)} + \\ + \binom{n}{4} u^{IV}y^{(n-3)} + \dots + u^{(n)}y' = \\ = \alpha \left[u'y^{(n)} + \binom{n}{1} u''y^{(n-1)} + \binom{n}{2} u'''y^{(n-2)} + \right. \\ \left. + \binom{n}{3} u^{IV}y^{(n-3)} + \dots + \binom{n}{1} u^{(n)}y' + u^{(n+1)}y \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

Перенося все члены, кроме последнего, в левую часть и, располагая по производным $y^{(n+1)}$, $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, ..., y'' , y' , будем иметь:

$$\begin{aligned} uy^{(n+1)} + \left[\binom{n}{1} - \alpha \right] u'y^{(n)} + \left[\binom{n}{2} - \binom{n}{1} \alpha \right] u''y^{(n-1)} + \\ + \left[\binom{n}{3} - \binom{n}{2} \alpha \right] u'''y^{(n-2)} + \left[\binom{n}{4} - \binom{n}{3} \alpha \right] u^{IV}y^{(n-3)} + \dots \\ \dots + \left[1 - \binom{n}{1} \alpha \right] u^{(n)}y' = \alpha u^{(n+1)}y. \quad (5) \end{aligned}$$

¹⁾ См. Грэнвилль-Лузин, Элементы дифференциального и интегрального исчисления, т. I, 1930, стр. 372, формула (17).

Произведя такую замену, будем иметь:

$$D_1 = \begin{vmatrix} \alpha u^{(n)} y, & \left[\binom{n-1}{1} - \alpha \right] u', & \left[\binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{1} \alpha \right] u'', & \dots, & \left[1 - \binom{n-1}{1} \alpha \right] u^{(n-1)} \\ \alpha u^{(n-1)} y, & u, & \left[\binom{n-2}{1} - \alpha \right] u', & \dots, & \left[1 - \binom{n-2}{1} \alpha \right] u^{(n-2)} \\ \alpha u^{(n-2)} y, & 0, & u, & \dots, & \left[1 - \binom{n-3}{1} \alpha \right] u^{(n-3)} \\ \alpha u^{(n-3)} y, & 0, & 0, & \dots, & \left[1 - \binom{n-4}{1} \alpha \right] u^{(n-4)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha u' y, & 0, & 0, & \dots, & u \end{vmatrix} \quad (9)$$

Вынося за знак детерминанта D_1 общий множитель, входящий в элементы первого столбца, а именно αu , который равен αu^α , и деля на D , равное u^n , будем иметь окончательно:

$$y^{(n)} = \alpha u^{\alpha-n} \cdot \begin{vmatrix} u^{(n)}, & \left[\binom{n-1}{1} - \alpha \right] u', & \left[\binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{1} \alpha \right] u'', & \dots, & \left[1 - \binom{n-1}{1} \alpha \right] u^{(n-1)} \\ u^{(n-1)}, & u, & \left[\binom{n-2}{1} - \alpha \right] u', & \dots, & \left[1 - \binom{n-2}{1} \alpha \right] u^{(n-2)} \\ u^{(n-2)}, & 0, & u, & \dots, & \left[1 - \binom{n-3}{1} \alpha \right] u^{(n-3)} \\ u^{(n-3)}, & 0, & 0, & \dots, & \left[1 - \binom{n-4}{1} \alpha \right] u^{(n-4)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u', & 0, & 0, & \dots, & u \end{vmatrix} \quad (10)$$

Формула (10) дает выражение производной n -го порядка от u^α , где u есть функция от x .

Дадим теперь три примера.

1. $y = \sin^4 x$; требуется найти y''' . Здесь $n = 3$; $\alpha = 4$; $u = \sin x$; $u' = \cos x$; $u'' = -\sin x$; $u''' = -\cos x$.

Подставляя в формулу (10), будем иметь:

$$y''' = 4 \sin x \cdot \begin{vmatrix} -\cos x & -2 \cos x & 7 \sin x \\ -\sin x & \sin x & -3 \cos x \\ \cos x & 0 & \sin x \end{vmatrix} = 24 \sin x \cos^3 x - 40 \sin^3 x \cos x.$$

2. $y = \sqrt{x^2 + 1} = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$; определить y''' .

Здесь $n = 3$; $\alpha = \frac{1}{2}$; $u = x^2 + 1$; $u' = 2x$; $u'' = 2$; $u''' = 0$. Подставляя в формулу (10), будем иметь:

$$y''' = \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-\frac{5}{2}} \cdot \begin{vmatrix} 0 \left(2 - \frac{1}{2} \right) \cdot 2x & \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot 2 \\ 2 & x^2 + 1 & \left(1 - \frac{1}{2} \right) \cdot 2x \\ 2x & 0 & x^2 + 1 \end{vmatrix} = -3x (x^2 + 1)^{-\frac{5}{2}}.$$

3. $y = (x^2 - 3)^3$; найти y^{IV} .

Здесь $n = 4$; $\alpha = 3$; $u = x^2 - 3$; $u' = 2x$; $u'' = 2$; $u''' = 0$. Подставляя в формулу (10), будем иметь:

$$y^{IV} = 2 (x^2 - 3)^2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2x & -6 & 0 \\ 0 & x^2 - 3 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & x^2 - 3 & -2x \\ 2x & 0 & 0 & x^2 - 3 \end{vmatrix} = 24.$$

Эти результаты можно проверить непосредственно.

ЕДИНАЯ СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ ЧАСТНОГО ИНТЕГРАЛА ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФИЦИЕНТАМИ И ОСОБЕННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Г. К. Брусиловский (Москва)

1

В программы вузов и многих техникумов в качестве одного из важнейших моментов преподавания входит решение уравнения:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = F(x), \quad (1)$$

где a_0, a_1, \dots, a_n — постоянные числа, а $F(x)$ — или постоянное число, или целая функция, или показательная, или тригонометрическая (синус, косинус), или произведение показательной функции на тригонометрическую, или произведение степенной функции на показательную или тригонометрическую, или произведение степенной, показательной и тригонометрической функций. Как известно, общий интеграл такого уравнения состоит из суммы

1) общего решения однородного уравнения:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (2)$$

и 2) частного интеграла уравнения (1).

Отыскание общего решения уравнения (2) не вызывает методических трудностей, если не считать вывода особых форм интеграла для случая, когда характеристическое уравнение

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = f(\lambda) = 0 \quad (3)$$

имеет кратные корни.

Затруднения и теоретического и практического характера возникают при отыскании частного интеграла уравнения (1), особенно в тех случаях, когда правая часть его, т. е. функция $F(x)$, содержит: e^{px} , $\cos px$, $\sin px$, где множитель p есть или действительный корень уравнения (3) или коэффициент мнимой части его комплексного корня, а также тогда, когда $F(x)$ представляет произведение степенной, показательной и тригонометрической функций или же двух из них.

Для отыскания частного интеграла обычно пользуются методом *неопределенных коэффициентов*. Распространенность этого метода объясняется, очевидно, его теоретической простотой. Однако он отнимает у учащихся много времени на «черную» работу, а если его, как это практикуется, преподносят в форме голых рецептов, то возникают возражения и принципиального характера.

Метод *символический* (операторов) требует значительных усилий как со стороны преподавателя, так и учащихся, и при всем своем изяществе зачастую приводит к утомительным выкладкам. Пользование этим методом для решения линейных уравнений может быть оправдано лишь в том случае, если оно является подготовкой к дальнейшему применению операторов в специальных дисциплинах.

Метод *Лагранжа* (вариации произвольной постоянной) нельзя назвать легким ни в теоретическом, ни в практическом отношении: здесь имеет место и кропотливая работа по решению своеобразных систем уравнений и интегрирование по частям. Вряд ли можно с успехом защищать применение этого способа для решения уравнений рассматриваемого вида.

Подстановка $y = ze^{px}$ требует повторного дифференцирования произведения. В результате получаем новое уравнение, в котором правая часть — целая функция. Во множестве случаев (и притом наиболее важных) вся эта работа является совершенно излишней и может быть заменена одним вычислением.

Изложенный ниже способ отыскания частного интеграла линейного уравнения с постоянными коэффициентами, не представляя особых теоретических затруднений, дает значительную экономию во времени по сравнению с перечисленными методами.

В основе его лежит все тот же метод неопределенных коэффициентов, но улучшенный как в теоретическом, так и в практическом отношении. Вместо разрозненных «правил с исключениями» получаем единую схему отыскания частного интеграла, освобождающую от лишней работы.

Одной из существенных особенностей рекомендуемого способа является использование — и в теории и в практике — двух теорем, которые Фрей («Элементарный курс дифференциальных уравнений») называет «принципом наложения» и «принципом разложения». Мы докажем эти теоремы для линейных уравнений с постоянными коэффициентами, хотя нетрудно видеть, что доказательство сохраняет силу и для переменных коэффициентов.

II. ПРИНЦИП НАЛОЖЕНИЯ

Теорема. Если y_1 есть решение уравнения:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = F_1(x), \quad (a)$$

а y_2 — решение уравнения:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = F_2(x), \quad (б)$$

то функция $\bar{y} = y_1 + y_2$ является решением уравнения

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = F_1(x) + F_2(x). \quad (в)$$

Доказательство. Из условия теоремы вытекают тождества:

$$\begin{aligned} a_0 y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \dots + a_n y_1 &\equiv F_1(x), \\ a_0 y_2^{(n)} + a_1 y_2^{(n-1)} + \dots + a_n y_2 &\equiv F_2(x). \end{aligned}$$

Сложив эти равенства почленно и заметив, что

$$y_1^{(i)} + y_2^{(i)} = (y_1 + y_2)^{(i)} = \bar{y}^{(i)},$$

придем к тождеству:

$$a_0 \bar{y}^{(n)} = a_2 \bar{y}^{(n-1)} + \dots + a_n \bar{y} \equiv F_1(x) + F_2(x),$$

откуда следует, что \bar{y} есть, действительно, решение уравнения (в).

Непосредственным следствием теоремы являются известные правила:

1. Чтобы найти частный интеграл уравнения (1), если правая его часть представляет сумму нескольких функций, достаточно заменить правую часть каждым из слагаемых поочередно, найти частный интеграл каждого из полученных уравнений и сложить все эти интегралы.

2. Если y_1 есть общее решение уравнения (а), а y_2 — частное решение уравнения (б), то $\bar{y} = y_1 + y_2$ есть общее решение уравнения (в).

Это положение вытекает непосредственно из того, что \bar{y} , будучи решением уравнения (в), содержит, как и y_1 , n произвольных независимых постоянных.

3. Если $F_1(x) = 0$, то уравнение (а) есть уравнение (б) «без правой части» (однородное уравнение). Для этого частного случая предыдущее следствие выражает известное правило отыскания общего решения линейного дифференциального уравнения:

Чтобы получить общее решение линейного дифференциального уравнения, надо к частному его решению прибавить общее решение однородного уравнения (так называемую «дополнительную функцию»).

4. Если $F_1(x) = F_2(x) = 0$, то уравнения (а), (б) и (в) оказываются тождественными и теорема наложения выражает тогда известное свойство однородного линейного дифференциального уравнения:

Сумма двух или нескольких решений линейного однородного уравнения также будет решением этого уравнения.

III. ПРИНЦИП РАЗЛОЖЕНИЯ

Сформулируем задачу, обратную той, которая разрешается с помощью теоремы наложения.

Пусть y есть решение уравнения:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = F(x) \quad (в)$$

и

$$F(x) = F_1(x) + F_2(x).$$

Требуется найти: 1) решение y_1 уравнения:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = F_1(x) \quad (a)$$

и 2) решение y_2 уравнения:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = F_2(x), \quad (б)$$

не решая этих двух уравнений, а имея только в виду, что согласно теореме наложения

$$\bar{y} = y_1 + y_2.$$

Такая задача неразрешима: зная только сумму искомых решений, мы не имеем критерия, который позволил бы отделить одно слагаемое, удовлетворяющее уравнению (а), от другого, удовлетворяющего уравнению (б).

Задача становится возможной, если положить: 1) что в уравнении (в) правая часть есть *комплексная функция* аргумента x , а именно:

$$F(x) = F_1(x) + iF_2(x),$$

и 2) что в этом уравнении все коэффициенты действительные. Очевидно, при этом решение \bar{y} уравнения (в) есть также комплексная функция:

$$\bar{y} = \varphi(x) + i\psi(x),$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — действительные величины.

Подставив y вместо y в уравнение (в), получим тождество:

$$[a_0 \varphi^{(n)}(x) + a_1 \varphi^{(n-1)}(x) + \dots + a_n \varphi(x)] + \\ + i[a_0 \psi^{(n)}(x) + a_1 \psi^{(n-1)}(x) + \dots + a_n \psi(x)] \equiv F_1(x) + iF_2(x).$$

Согласно условию, выражения в квадратных скобках — действительны: коэффициенты — действительные, а производные действительных функций также действительны. Предыдущее тождество распадается на два тождества:

$$a_0 \varphi^{(n)}(x) + a_1 \varphi^{(n-1)}(x) + \dots + a_n \varphi(x) \equiv F_1(x)$$

и

$$a_0 \psi^{(n)}(x) + a_1 \psi^{(n-1)}(x) + \dots + a_n \psi(x) \equiv F_2(x),$$

так как из равенства двух комплексных величин следует, что равны в отдельности их действительные и мнимые части.

Значит, $\varphi(x) = y_1$ и $\psi(x) = y_2$ суть решения соответственно уравнений (а) и (б). Таким образом комплексное решение \bar{y} разлагается на два слагаемых, из которых одно является его действительной частью, а другое — мнимой.

Мы доказали теорему, выражающую принцип разложения:
Если в уравнении

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = F(x)$$

коэффициенты — действительные числа, а $F(x)$ — комплексная функция, и если \bar{y} — комплексное решение этого уравнения, то действительная часть этого решения будет решением уравнения:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = F_1(x),$$

а его мнимая часть — решением уравнения:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = F_2(x),$$

где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — действительная и мнимая часть функции $F(x)$.
Пользуясь формулой Эйлера:

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$$

и доказанной теоремой, можно заменять в правой части уравнения (1) тригонометрическую функцию (косинус или синус) показательной функцией. Выясним это на примерах.

Пример 1. Найти частный интеграл уравнения:

$$y'' + 3y = \cos 2x.$$

Вместо заданного уравнения будем решать уравнение:

$$y'' + 3y = \cos 2x + i \sin 2x,$$

т. е. уравнение:

$$y'' + 3y = e^{iz}.$$

Пусть \bar{y} — (комплексное) решение этого уравнения. Тогда действительное слагаемое (R) этого решения будет решением y заданного уравнения:

$$y = R(\bar{y}).$$

Пример 2. Найти частный интеграл уравнения:

$$y'' - 5y' + y = (x^2 - 5x - 1)e^{-2x} \sin x.$$

Пусть \bar{y} — решение уравнения:

$$y'' - 5y' + y = (x^2 - 5x - 1)e^{(-2+i)x}.$$

Тогда мнимая часть (1) функции \bar{y} будет решением y заданного уравнения:

$$y = I(\bar{y}).$$

IV. ЧАСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Линейным уравнением с постоянными коэффициентами и особенной правой частью условимся называть уравнение вида:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = (b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0) e^{px}, \quad (4)$$

где выражение в скобках — целая функция, а p — любое комплексное число.

В зависимости от значений коэффициентов целой функции и показателя p правая часть может принимать замечательные формы, часто встречающиеся в приложениях.

Правая часть может быть:

1) показательной функцией, если p — действительное число (не нуль) и $b_k = b_{k-1} = \dots = b_1 = 0$, $b_0 \neq 0$;

2) тригонометрической функцией (синус, косинус), если p — чисто мнимое число и $b_k = b_{k-1} = \dots = b_1 = 0$, $b_0 \neq 0$;

3) произведением показательной функции на тригонометрическую, если p — комплексное число и $b_k = b_{k-1} = \dots = b_1 = 0$, $b_0 \neq 0$;

4) произведением степенной функции на показательную или тригонометрическую или на ту и другую, если $b_0 = b_1 = \dots = b_{k-1} = 0$, $b_k \neq 0$, а p — или действительное, или мнимое, или комплексное число;

5) целой рациональной функцией, если $p = 0$.

Частный интеграл уравнения (1) естественно искать в форме:

$$\bar{y} = (ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots + kx + l)e^{px},$$

где a, b, c, \dots — числа, подлежащие отысканию, а m не меньше k ($m \geq k$).

Для простоты положим, что $k = 3$ и что уравнение (4) имеет вид:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = (b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0) e^{px}. \quad (5)$$

В левую часть уравнения (5) подставим вместо y функцию

$$y = e^{px},$$

где параметр p — переменная величина. Мы получим тождество (а), которое три раза последовательно продифференцируем по параметру p :

$$A \begin{cases} a_0 (e^{px})^{(n)} + a_1 (xe^{px})^{(n-1)} + \dots + a_n (e^{px}) \equiv f(p) e^{px}, & (a) \\ a_0 (xe^{px})^{(n)} + a_1 (x^2 e^{px})^{(n-1)} + \dots + a_n (xe^{px}) \equiv [x f(p) + f'(p)] e^{px}, & (б) \\ a_0 (x^2 e^{px})^{(n)} + a_1 (x^3 e^{px})^{(n-1)} + \dots + a_n (x^2 e^{px}) \equiv [x^2 f(p) + 2x f'(p) + f''(p)] e^{px}, & (в) \\ a_0 (x^3 e^{px})^{(n)} + a_1 (x^4 e^{px})^{(n-1)} + \dots + a_n (x^3 e^{px}) \equiv [x^3 f(p) + 3x^2 f'(p) + 3x f''(p) + f'''(p)] e^{px}. & (г) \end{cases}$$

В скобочных выражениях правых частей тождеств (А) численные коэффициенты при степенях x — биномиальные коэффициенты двучлена нулевой, первой, второй и третьей степени, согласно формуле Лейбница. Что касается буквенных множителей при степенях x , то в каждой строке старший буквенный коэффициент равен $f(p)$, второй по порядку — $f'(p)$ и т. д.

Умножим обе части каждого из тождеств на некоторые (пока произвольные) числа: a, b, c и d , а именно: нижнее равенство на a , второе снизу — на b и т. д. Введем эти множители внутрь скобочных выражений как в левой, так и в правой части каждого равенства, например:

$$a_0 (ax^3 e^{px})^{(n)} + a_1 (ax^2 e^{px})^{(n-1)} + \dots + a_n (ax^3 e^{px}) \equiv [ax^3 f(p) + 3ax^2 f'(p) + \dots + af'''(p)] e^{px}.$$

Затем сложим преобразованные равенства почленно. Не будем выписывать полученное тождество, но обозначим его номером (6) и назовем *суммарным* равенством. Левая часть суммарного тождества (6) будет иметь вид:

$$a_0 \bar{y}^{(n)} + a_1 \bar{y}^{(n-1)} + \dots + a^n \bar{y},$$

где

$$\bar{y} = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{px}. \quad (7)$$

Правая часть тождества (6) также будет произведением e^{px} на некоторую целую функцию. Эта функция — третьей степени ($m=k$), если $f(p) \neq 0$, т. е. если p не является корнем характеристического уравнения:

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (3)$$

Для того чтобы функция \bar{y} была решением уравнения (5), необходимо и достаточно, чтобы правая часть уравнения (5) была тождественна с правой частью суммарного равенства (6), а для этого коэффициенты при одинаковых степенях в этих выражениях должны быть равны между собою. Следовательно, функция (7) будет решением уравнения (5), если коэффициенты a , b , c и d будут выбраны таким образом, чтобы при данном значении p имели место равенства:

$$A' \begin{cases} a \cdot f(p) = b_3; & (a') \\ b \cdot f(p) + 3a \cdot f'(p) = b_2; & (б') \\ c \cdot f(p) + 2b \cdot f'(p) + 3af''(p) = b_1; & (в') \\ d \cdot f(p) + cf'(p) + bf''(p) + af'''(p) = b_0. & (г') \end{cases}$$

Из этой системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными можно определить неизвестные числа a , b , c и d , если, как было уже сказано, $f(p) \neq 0$.

У. СХЕМА ВЫЧИСЛЕНИЯ ЧАСТНОГО ИНТЕГРАЛА

Выкладки предыдущего номера можно уложить в схему, удобную как для вычислений, так и для иллюстрации теории.

Полагаем пока, что показатель p не служит корнем характеристического уравнения:

$$f(p) \neq 0.$$

Вследствие этого, как было уже показано, степень целой функции в частном интеграле:

$$\bar{y} = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

та же, что и в целой функции правой части уравнения (5):

$$m = k.$$

Для построения схемы, позволяющей сразу писать уравнение системы (A'), поступаем следующим образом:

1) Составляем выражения функции $f(\lambda)$, т. е. левой части характеристического уравнения, и ее k первых производных.

2) Вычисляем: $f(p), f'(p), \dots, f^{(k)}(p)$; в данном случае:

$$f(p), f'(p), f''(p), f'''(p).$$

3) Выписываем треугольник Паскаля, состоящий из $k+1$ строк (считая за строку и «вершину» 1), и обводим его рамкой (для данного случая см. фиг. 1).

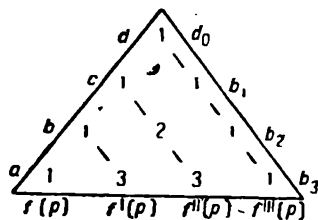
4) Под основанием треугольника подписываем значения функции и ее производных, полученные в п. 2, таким образом, чтобы они составляли продолжение левых (косых) параллелей треугольника; назовем эти числа $f(p), f'(p)$ и т. д. нижними индексами (соответственных левых параллелей).

5) С правого бока приписываем в последовательном порядке снизу вверх коэффициенты полинома правой части уравнения (5) таким образом, чтобы они составляли продолжение (горизонтальных) строк треугольника; назовем эти числа правыми индексами строк.

6) С левого бока, опять вдоль строк, пишем неизвестные коэффициенты частного интеграла в последовательном порядке снизу вверх; назовем эти коэффициенты левыми индексами строк. Схема готова.

Выкладки и построение треугольника располагаются следующим образом:

$$\begin{array}{ll} f(\lambda) = ? & f(p) = ? \\ f'(\lambda) = ? & f'(p) = ? \\ f''(\lambda) = ? & f''(p) = ? \\ f'''(\lambda) = ? & f'''(p) = ? \end{array}$$



Фиг. 1.

7) Мысленно проводим правые косые параллели (они показаны черточками на фиг. 1). Двигаясь по такой параллели снизу вверх (справа налево), умножаем каждое ее число на нижний индекс той левой параллели и на левый индекс той строки, на пересечении которых это число находится. Полученные произведения складываем и сумму их приравняем правому индексу наивысшей строки, достигнутой при движении по данной правой параллели.

Таким образом мы получим и последовательно разрешим относительно a, b, c и d уравнения системы (A'), что всегда возможно, так как коэффициент $f(p)$ согласно условию не равен нулю.

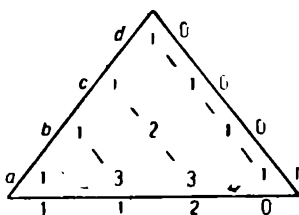
$$\begin{array}{ll} 1 \cdot f(p) \cdot a = b_3; & \text{находим } a = \frac{b_3}{f(p)}. \\ 3 \cdot f'(p) \cdot a + 1 \cdot f(p) \cdot b = b_2; & \text{находим } b. \\ 3 \cdot f''(p) \cdot a + 2 \cdot f'(p) \cdot b + 1 \cdot f(p) \cdot c = b_1; & \text{находим } c. \\ 1 \cdot f'''(p) \cdot a + 1 \cdot f''(p) \cdot b + 1 \cdot f'(p) \cdot c + 1 \cdot f(p) \cdot d = b_0; & \text{находим } d. \end{array}$$

Получаем:

$$\bar{y} = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{px}.$$

Примеры. 3. Найти частный интеграл уравнения:

$$y'' - 3y' + 3y = x^3 e^{2x}.$$



Фиг. 2.

$$f(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 3 \quad f(2) = 1$$

$$f'(\lambda) = 2\lambda - 3 \quad f'(2) = 1$$

$$f''(\lambda) = 2 \quad f''(2) = 2$$

$$f'''(\lambda) = 0 \quad f'''(2) = 0$$

$$1 \cdot 1 \cdot a = 1;$$

$$a = 1;$$

$$1 \cdot 3 \cdot a + 1 \cdot 1 \cdot b = 0;$$

$$b = -3;$$

$$3 \cdot 2 \cdot a + 2 \cdot 1 \cdot b + 1 \cdot 1 \cdot c = 0;$$

$$c = 0;$$

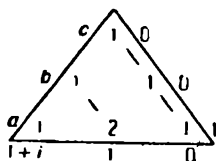
$$1 \cdot 0 \cdot a + 1 \cdot 2 \cdot b + 1 \cdot 1 \cdot c + 1 \cdot 1 \cdot d = 0;$$

$$d = 6.$$

$$y = (x^3 - 3x^2 + 6)e^{2x}.$$

4. Найти частный интеграл уравнения:

$$y' + y = x^2 \cos x = R(x^2 e^{ix}).$$



Фиг. 3.

$$f(\lambda) = \lambda + 1 \quad f(i) = 1 + i$$

$$f'(\lambda) = 1 \quad f'(i) = 1$$

$$f''(\lambda) = 0 \quad f''(i) = 0$$

$$a(1 + i) = 1; \quad a = \frac{1-i}{2};$$

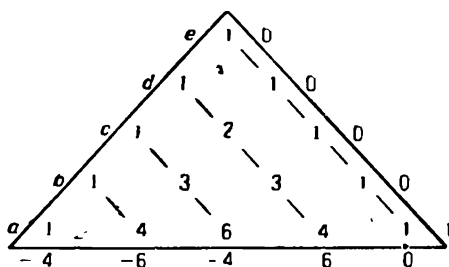
$$2a + b(1 + i) = 0; \quad b = -\frac{1-i}{1+i} = i;$$

$$b + c(1 + i) = 0; \quad c = -\frac{1-i}{1+i} = -\frac{1+i}{2};$$

$$\bar{y} = R\left(\frac{1-i}{2}x^2 + ix - \frac{1+i}{2}\right)e^x = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)\cos x + \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}\right)\sin x.$$

5. Найти частный интеграл уравнения:

$$y''' - 5y'' + y' - y = x^4 e^x.$$



Фиг. 4.

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + \lambda - 1 \quad f(1) = -4$$

$$f'(\lambda) = 3\lambda^2 - 10\lambda + 1 \quad f'(1) = -6$$

$$f''(\lambda) = 6\lambda - 10 \quad f''(1) = -4$$

$$f'''(\lambda) = 6 \quad f'''(1) = 6$$

$$f^{(4)}(\lambda) = 0 \quad f^{(4)}(1) = 0$$

$$a \cdot (-4) = 1;$$

$$a = -\frac{1}{4};$$

$$4a \cdot (-6) + b \cdot (-4) = 0; \quad 6 - 4b = 0;$$

$$b = \frac{3}{2};$$

$$6a \cdot (-4) + 3b \cdot (-6) + c \cdot (-4) = 0; \quad 6 - 27 - 4c = 0;$$

$$c = -\frac{21}{4};$$

$$4a \cdot 6 + 3b \cdot (-4) + 2c \cdot (-6) + d \cdot (-4) = 0; \quad -6 - 18 + 63 - 4d = 0; \quad d = \frac{39}{4};$$

$$a \cdot 0 + b \cdot 6 + c \cdot (-4) + d \cdot (-6) + e \cdot (-4) = 0; \quad 9 + 21 - \frac{117}{2} - 4e = 0; \quad e = -\frac{57}{8}.$$

$$\bar{y} = \left(-\frac{1}{4} x^4 + \frac{3}{2} x^3 - \frac{21}{4} x^2 + \frac{39}{4} x - \frac{57}{8} \right) e^x.$$

6. Найти частный интеграл уравнения:

$$y'' + y = (2x + 1) e^{-x} \sin 2x = I (2x + 1) e^{(-1+i \cdot 2)x}$$

$$f(\lambda) = \lambda^2 + 1 \quad f(-1 + i \cdot 2) = -2 - i \cdot 4$$

$$f'(\lambda) = 2\lambda \quad f'(-1 + i \cdot 2) = -2 + i \cdot 4$$

$$a(-2 - i \cdot 4) = 2; \quad a = -\frac{1}{1 + i \cdot 2} = -\frac{1 - i \cdot 2}{5};$$

$$a(-2 + i \cdot 4) + b(-2 - i \cdot 4) = 1;$$

$$-\frac{1 - i \cdot 2}{5} (-2 + i \cdot 4) - 1 = b(2 + i \cdot 4);$$

$$\frac{-1 + i \cdot 2}{5} (-1 + i \cdot 2) - \frac{1}{2} = b(1 + i \cdot 2);$$

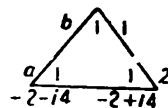
$$\frac{-3 - i \cdot 4}{5} - \frac{1}{2} = b(1 + i \cdot 2);$$

$$b = \frac{(-11 - i \cdot 8)(1 - i \cdot 2)}{50} = \frac{-27 + i \cdot 14}{50};$$

$$\bar{y} = I \left(-\frac{1 - i \cdot 2}{5} x - \frac{27 - i \cdot 14}{50} \right) e^{(-1+i \cdot 2)x}$$

$$= e^{-x} \left[\left(\frac{2}{5} x + \frac{7}{25} \right) \cos x - \left(\frac{1}{5} x + \frac{27}{50} \right) \sin x \right]$$

$$= \frac{1}{50} e^{-x} [(20x + 14) \cos x - (10x + 27) \sin x].$$



Фиг. 5.

З а м е ч а н и е. Имея в виду случаи, когда целая функция, входящая в правую часть уравнения, — высокой степени, можно приготовить трафаретный треугольник с достаточным числом строк. Боковые индексы пишут по краям трафарета (на бумаге), а нижние — подписываются на полоске бумаги под соответствующей строкой.

VI. ПРАВАЯ ЧАСТЬ — ЦЕЛАЯ ФУНКЦИЯ

Если в правой части уравнения (1) — целая функция, то соответствующий частный интеграл можно найти по предыдущей схеме, положив $p = 0$. Здесь нет надобности дифференцировать функцию $f(\lambda)$, так как заранее известно, что

$$f(0) = a_n, \quad f'(0) = a_{n-1} \cdot 1!; \quad f''(0) = a_{n-2} \cdot 2!; \quad f'''(0) = a_{n-3} \cdot 3! \text{ и т. д.}$$

Таким образом нижние индексы треугольника выписываются сразу по коэффициентам левой части уравнения, но в обратном порядке.

Примеры. 7. Найти частный интеграл уравнения:

$$y^x - 5y^{vi} + 3y'' + y = x^2 - 2x + 3.$$

Здесь имеем:

$$f(0) = 1; \quad f'(0) = 0; \quad f''(0) = 6.$$

$$a = 1; \quad b = -2; \quad 6a + c = 3; \quad c = -3.$$

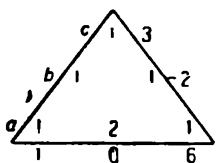
$$\bar{y} = x^2 - 2x - 3.$$

8. Найти частный интеграл уравнения:

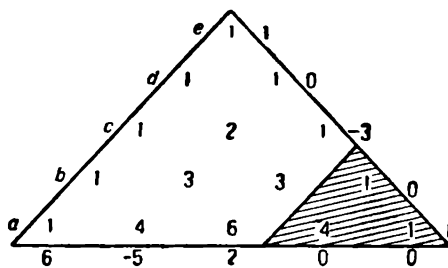
$$y'' - 5y' + 6y = x^4 - 3x^2 + 1.$$

Здесь

$$f(0) = 6; \quad f'(0) = -5; \quad f''(0) = 2; \quad f'''(0) = f^{iv}(0) = 0.$$



Фиг. 6.



Фиг. 7.

$$6a = 1, \quad a = \frac{1}{6};$$

$$-20a + 6b = 0; \quad b = \frac{5}{9};$$

$$12a - 15b + 6c = -3; \quad c = \frac{5}{9};$$

$$6b - 10c + 6d = 0; \quad d = \frac{10}{27};$$

$$2c - 5d + 6e = 1; \quad e = \frac{47}{162};$$

$$\bar{y} = \frac{1}{6}x^4 + \frac{5}{9}x^3 + \frac{5}{9}x^2 + \frac{10}{27}x + \frac{47}{162}.$$

Замечание. На фиг. 7 от треугольника «отсечен» треугольник, составленный левыми параллелями с нижними нулевыми индексами. Числа отсеченного треугольника вовсе не входят в рассмотрение, так как они умножаются на нуль. Так же постулат со всякой левой параллелью, имеющей нулевой индекс.

Левые параллели с нулевыми индексами вычеркиваются. Числа, стоящие на них, пропускаются при движении по правым параллелям.

Правило это, очевидно, справедливо и для общего случая (см. V).

VII. p ЕСТЬ КОРЕНЬ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Положим теперь, что показатель p есть простой корень характеристического уравнения. В таком случае

$$f(p) = 0; \quad f'(p) \neq 0,$$

и уравнение (а') системы (А')

$$f(p) \cdot a = b_3$$

теряет смысл, а значит, теряет смысл вся система уравнений (А').

Чтобы определить a (и затем b , c и d), продифференцируем по параметру p все тождества (А). Каждое из первых трех превратится в следующее по порядку, а вместо тождества (г) получим новое тождество (д):

$$\begin{cases} a_0(xe^{px})^{(n)} + a_1(xe^{px})^{(n-1)} + \dots + a_n(xe^{px}) \equiv [xf(p) + f'(p)]e^{px}, & (б) \\ a_0(x^2e^{px})^{(n)} + a_1(x^2e^{px})^{(n-1)} + \dots + a_n(x^2e^{px}) \equiv [x^2f(p) + 2xf'(p) + f''(p)]e^{px}, & (в) \\ a_0(x^3e^{px})^{(n)} + a_1(x^3e^{px})^{(n-1)} + \dots + a_n(x^3e^{px}) \equiv [x^3f(p) + 3x^2f'(p) + 3xf''(p) + f'''(p)]e^{px}, & (г) \\ a_0(x^4e^{px})^{(n)} + a_1(x^4e^{px})^{(n-1)} + \dots + a_n(x^4e^{px}) \equiv [x^4f(p) + 4x^3f'(p) + 6x^2f''(p) + 4xf'''(p) + f^{(iv)}(p)]e^{px}. & (д) \end{cases}$$

Во всех тождествах (В) $f(p) = 0$ ¹⁾

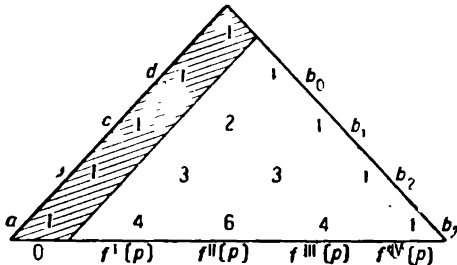
Треугольник фиг. 1 дополнится еще одной строкой (фиг. 8), но в нем зачеркивается одна левая параллель, так как ее индекс равен нулю.

Дифференцируя по p , мы умножаем на x каждый член левой части суммарного равенства (б), следовательно, и каждое слагаемое функции

$$\bar{y} = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{px} \quad (7)$$

и всех ее производных. Поэтому левая часть суммарного равенства примет после дифференцирования следующий вид:

$$\begin{aligned} & a_0\bar{y}_1^{(n)} + a_1\bar{y}_1^{(n-1)} + \dots + a_n\bar{y}_1, \\ \text{где} \quad & \bar{y}_1 = (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx)e^{px}, \\ \text{т. е.} \quad & \bar{y}_1 = \frac{\partial \bar{y}}{\partial p}. \end{aligned} \quad (8)$$



Фиг. 8.

¹⁾ Этот прием (дифференцирования по параметру) является наиболее убедительным способом для получения общего решения однородного уравнения (2) в случае кратных корней характеристического уравнения (Поссе, стр. 619).

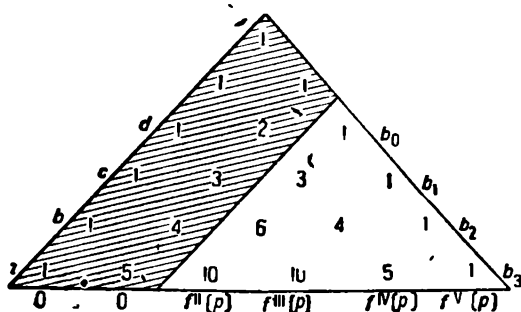
Правая часть суммарного равенства представит после дифференцирования произведение e^{px} на целую функцию третьей степени. Пользуясь схемой фиг. 8, составляем новую систему уравнений (В'):

$$В' \begin{cases} 4 \cdot f''(p) \cdot a = b_3; & (б') \\ 6 \cdot f''(p) \cdot a + 3f'(p) \cdot b = b_2; & (в') \\ 4 \cdot f'''(p) \cdot a + 3f''(p) \cdot b + 2 \cdot f'(p) \cdot c = b_1; & (г') \\ 1 \cdot f^{IV}(p) \cdot a + 1 \cdot f'''(p) \cdot b + 1 \cdot f''(p) \cdot c + 1 \cdot f'(p) \cdot d = b_0. & (д') \end{cases}$$

Решив эту систему (что возможно, так как $f'(p) \neq 0$), мы подберем a , b , c и d так, чтобы правая часть суммарного равенства была тождественна с правой частью уравнения (5).

Тогда функция (8) будет интегралом этого уравнения.

Если p — двукратный корень характеристического уравнения, то



Фиг. 9.

$$f(p) = f'(p) = 0; f''(p) \neq 0.$$

Треугольник фиг. 8 дополнится еще одной строкой (фиг. 9), что равносильно вторичному дифференцированию суммарного равенства (6) по параметру p . В треугольнике фиг. 9 зачеркнуты две левых параллели и справа отсечется треугольник из четырех строк. Из предыдущего ясно, что левая часть суммарного равенства после вторичного дифференцирования примет вид:

$$a_0 \bar{y}_2^{(n)} + a_1 \bar{y}_2^{(n-1)} + \dots + a_n \bar{y}_2,$$

где

$$\bar{y}_2 = (ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2)e^{px}, \quad (9)$$

т. е.

$$\bar{y}_2 = \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial p} = \frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial p^2}.$$

Пользуясь схемой фиг. 9, мы составим такую систему уравнений, которой должны удовлетворять числа a , b , c и d , для того чтобы функция (9) была интегралом уравнения (5).

Теперь можно сделать выводы, дополняющие пп. 1, 2 и 3 правила раздела V.

1. Если обратится в нуль первый или же несколько первых членов ряда: $f(p)$, $f'(p)$, ..., $f^{(n)}(p)$, то ряд продолжают на соответствующее число членов, а первоначальный треугольник дополняют таким же числом строк, причем левые параллели с нулевыми индексами вычеркиваются.

2. Степень целой функции, входящей в правую часть уравнения, всегда на 1 меньше числа строк в рабочем треугольнике (или полосе), считая «вершину» 1 за строку.

3. Степень целой функции, входящей в частный интеграл, на 1 меньше числа строк первоначального треугольника.

4. Незвестных коэффициентов частного интеграла всегда столько, сколько строк в рабочем треугольнике (или полосе) ¹⁾.

Примеры. 9. Найти частный интеграл уравнения:

$$y''' - 5y'' + 7y' - 3 = (x^2 + x + 1)e^x.$$

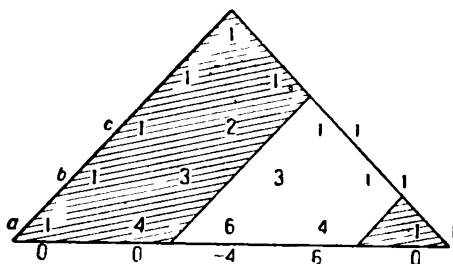
$f(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3$	$f(1) = 0$
$f'(\lambda) = 3\lambda^2 - 10\lambda + 7$	$f'(1) = 0$
$f''(\lambda) = 6\lambda - 10$	$f''(1) = 4$
$f'''(\lambda) = 6$	$f'''(1) = 6$
$f^{IV}(\lambda) = 0$	$f^{IV}(1) = 0$

$$-24a = 1; \quad a = -\frac{1}{24}.$$

$$24a - 12b = 1; \quad b = -\frac{1}{6}.$$

$$6b - 4c = 1; \quad c = -\frac{1}{2}.$$

$$\bar{y} = -\left(\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)e^x.$$



Фиг. 10.

10. Найти частный интеграл уравнения:

$$y''' + y'' = x^4 + 3x^3 + 1.$$

$$f(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2;$$

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 0; \quad f''(0) = 1 \cdot 2! = 2; \quad f'''(0) = 1 \cdot 3! = 6;$$

$$f^{IV}(0) = 0; \quad f^{IV}(0) = 0; \quad f^{VI}(0) = 0.$$

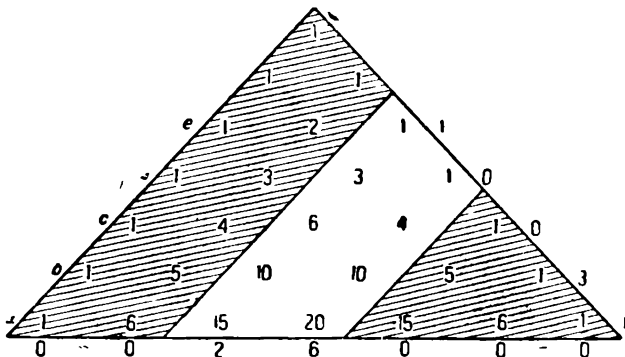
$$30a = 1; \quad a = \frac{1}{30}.$$

¹⁾ Остальные (младшие) коэффициенты произвольны и могут быть приняты равными нулю. В самом деле, если p , например, — двойной корень характеристического уравнения, то частный интеграл содержит множитель x^2 . Но в дополнительной функции в этом случае должны быть члены вида $c_1 e^{px}$ и $c_2 x e^{px}$. На основании теоремы наложения эти члены (с произвольными коэффициентами) могут быть прибавлены к частному интегралу. При получении общего решения выполняется приведение подобных членов.

$$120a + 20b = 0; \quad b = -6a = -\frac{1}{5}.$$

$$60b + 12c = 0; \quad c = -5b = 1; \quad 24c + 6d = 0; \quad d = -4c = -4.$$

$$6d + 2e = 1; \quad 2e = 25; \quad e = \frac{25}{2}.$$



Фиг. 11.

$$\bar{y} = \frac{1}{30} x^6 - \frac{1}{5} x^5 + x^4 - 4x^3 + \frac{25}{2} x^2.$$

11. Найти частный интеграл уравнения:

$$y^{iv} + 2y'' + y = x \cos x = R(xe^{ix}).$$

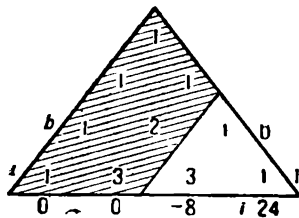
$$f(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 \quad f(i) = 0$$

$$f'(\lambda) = 4\lambda^3 + 4\lambda \quad f'(i) = 0$$

$$f''(\lambda) = 12\lambda^2 + 4 \quad f''(i) = -8$$

$$f'''(\lambda) = 24\lambda \quad f'''(i) = i24$$

$$-24a = 1; \quad a = -\frac{1}{24}.$$



Фиг. 12.

$$i24a - 8b = 0; \quad b = -\frac{1}{8} i.$$

$$\bar{y} = R\left(-\frac{1}{24} x^3 - \frac{i}{8} x^2\right) e^{ix} = -\frac{1}{24} x^3 \cos x + \frac{1}{8} x^2 \sin x.$$

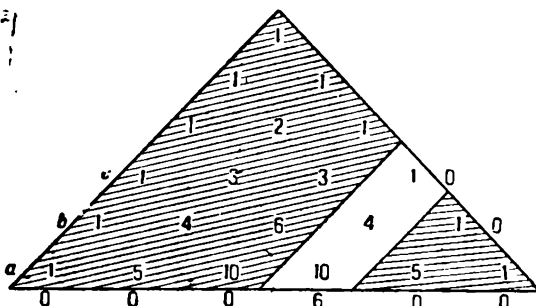
12. Найти частный интеграл уравнения:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2 e^x.$$

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 & f(1) &= 0 \\ f'(\lambda) &= 3\lambda^2 - 6\lambda + 3 & f'(1) &= 0 \\ f''(\lambda) &= 6\lambda - 6 & f''(1) &= 0 \\ f'''(\lambda) &= 6 & f'''(1) &= 6 \\ f^{IV}(\lambda) &= 0 & f^{IV}(1) &= 0 \\ f^V(\lambda) &= 0 & f^V(1) &= 0 \end{aligned}$$

$$60a = 1; \quad a = \frac{1}{60}.$$

$$4b = 0; \quad b = 0; \quad c = 0.$$



Фиг. 13.

$$\bar{y} = \frac{1}{60} x^6 e^x.$$

VIII. ПРАВАЯ ЧАСТЬ — ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ИЛИ ПРИВОДЯЩАЯСЯ К НЕЙ

Если в правой части уравнения (4)

$$b_k = b_{k-1} = \dots = b_1 = 0; \quad b_0 \neq 0,$$

то она принимает вид показательной функции:

$$b_0 e^{px},$$

где p — любое комплексное число.

К этому случаю вполне применима схема V, которая здесь чрезвычайно упрощается, так как целая функция правой части — нулевого измерения. Этот частный случай особо важен, и во многих учебных заведениях им только и ограничиваются (да еще случаем $p = 0$, т. е. одной целой функцией в правой части уравнения).

Имея в виду это обстоятельство, рассмотрим отыскание частного интеграла уравнения:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b e^{px} \quad (10)$$

независимо от схемы V.

Будем отыскивать частный интеграл уравнения (10) в форме:

$$\bar{y} = a e^{px}. \quad (11)$$

Подставив (11) в уравнение (10), мы приведем его к виду:

$$a_0 (a e^{px})^{(n)} + a_1 (a e^{px})^{(n-1)} + \dots + a_n (a e^{px}) = b e^{px}$$

или

$$f(p) \cdot a \cdot e^{px} = b e^{px}, \quad (12)$$

где

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n.$$

Равенство (12) будет тождеством, и функция (11) будет интегралом уравнения (10), если

$$f(p) \cdot a = b,$$

откуда

$$a = \frac{b}{f(p)}$$

и

$$\bar{y} = \frac{b}{f(p)} e^{px}. \quad (13)$$

Ср. уравнение (а') системы (А') на стр. 34.

Эта формула оказывается непригодной, если $f(p) = 0$, т. е. если p является корнем характеристического уравнения. Выведем формулу для частного интеграла уравнения (10) в предположении, что p есть корень k -й кратности характеристического уравнения.

ПЕРВЫЙ СПОСОБ¹⁾

Применим метод, уже использованный в IV для частного интеграла уравнения (1).

Следующее равенство является тождеством:

$$a_0(ae^{px})^{(n)} + a_1(ae^{px})^{(n-1)} + \dots + a_n(ae^{px}) \equiv f(p) \cdot ae^{px}. \quad (a)$$

Продифференцируем его несколько раз по параметру p , имея в виду, что, согласно теореме о порядке дифференцирования,

$$\frac{\partial^k}{\partial p^k} (e^{px})_x^{(i)} = \left(\frac{\partial^k}{\partial p^k} (e^{px}) \right)_x^{(i)} = (x^k e^{px})_x^{(i)}.$$

Мы получим следующие тождества:

$$c_0(axe^{px})^{(n)} + a_1(axe^{px})^{(n-1)} + \dots + a_n(axe^{px}) \equiv ae^{px}[xf(p) + f'(p)], \quad (б)$$

$$a_0(ax^2e^{px})^{(n)} + a_1(ax^2e^{px})^{(n-1)} + \dots + a_n(ax^2e^{px}) \equiv \equiv ae^{px}[x^2f(p) + 2xf'(p) + f''(p)], \quad (в)$$

$$a_0(ax^3e^{px})^{(n)} + a_1(ax^3e^{px})^{(n-1)} + \dots + a_n(ax^3e^{px}) \equiv \equiv ae^{px}[x^3f(p) + 3x^2f'(p) + 3xf''(p) + f'''(p)] \quad (г)$$

и т. д.

Из рассмотрения этих тождеств непосредственно видно, что функции

$$axe^{px}; \quad ax^2e^{px}, \quad ax^3e^{px}$$

будут решениями уравнения

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = be^{px}, \quad (10)$$

если правые части равенства (б), (в) и (г) соответственно будут равны правой части уравнения (10).

¹⁾ Этим методом пользуются некоторые авторы (Поссе, Штурм) для получения *общего интеграла однородного уравнения* (без правой части) в случае кратных корней. А. М. Лопшиц обратил мое внимание на возможность вывести таким же путем найденную мною формулу для *частного интеграла неоднородного уравнения* в случае кратных корней.

Если p — простой корень характеристического уравнения, то $f(p) = 0$, $f'(p) \neq 0$ и уравнение (относительно a):

$$ae^{px}[xf(p) + f'(p)] = be^{px}$$

принимает вид:

$$af'(p) = b,$$

откуда

$$a = \frac{b}{f'(p)} \quad \text{и} \quad \bar{y} = \frac{bx}{f'(p)} e^{px}. \quad (14)$$

Если p — корень второй кратности характеристического уравнения, то $f(p) = f'(p) = 0$; $f''(p) \neq 0$ и уравнение

$$ae^{px}[x^2f(p) + 2xf'(p) + f''(p)] = be^{px}$$

обращается в уравнение:

$$af''(p) = b,$$

откуда

$$a = \frac{b}{f''(p)} \quad \text{и} \quad \bar{y} = \frac{bx^2}{f''(p)} e^{px}.$$

Рассуждая и далее таким образом, придем к заключению, что если p — корень k -й кратности характеристического уравнения $f(\lambda) = 0$, то частный интеграл уравнения (10) выразится формулой:

$$\bar{y} = \frac{bx^k}{f^{(k)}(p)} e^{px}. \quad (15)$$

ВТОРОЙ СПОСОБ

Положим, что $f(p) \neq 0$. Тогда

$$\bar{y} = \frac{b}{f(p)} e^{px}$$

является по-предыдущему решением уравнения (10). Если λ_1 — простой корень характеристического уравнения, то функция

$$y = e^{\lambda_1 x},$$

а следовательно, и функция

$$y = -\frac{b}{f(p)} e^{\lambda_1 x}$$

будет одним из решений *однородного* уравнения. По теореме наложения функция

$$y = b \cdot \frac{e^{px} - e^{\lambda_1 x}}{f(p)} \quad (16)$$

также будет одним из частных интегралов уравнения (10). Положим теперь, что p изменяется и что

$$p \rightarrow \lambda_1.$$

Тогда

$$f(p) \rightarrow 0,$$

и функция (16) принимает при $p = \lambda_1$ неопределенный вид $\frac{0}{0}$. Раскроем неопределенность по правилу Лопиталя, дифференцируя числитель и знаменатель дроби по переменной p :

$$y = \frac{bx}{f'(p)} e^{px}. \quad (14)$$

Если $p = \lambda_1$ — двойной корень характеристического уравнения, то $f'(p) = 0$, и формула (14) теряет смысл. Но если λ_1 — двойной корень характеристического уравнения, то однородное уравнение, кроме решения $y = e^{\lambda_1 x}$, имеет также решение

$$y = x e^{\lambda_1 x},$$

а следовательно, и решение

$$y = - \frac{bx e^{\lambda_1 x}}{f'(p)},$$

где пока принимаем $p \neq \lambda_1$ и $f'(p) \neq 0$. По теореме наложения функция

$$y = bx \cdot \frac{e^{px} - e^{\lambda_1 x}}{f'(p)} \quad (17)$$

также является частным интегралом уравнения (10). При $p = \lambda_1$ функция (23) принимает вид неопределенности $\frac{0}{0}$. Раскрыв ее, мы получим выражение для частного интеграла на тот случай, когда p — двойной корень характеристического уравнения, а именно:

$$y = \frac{bx^2}{f''(p)} e^{px}.$$

Рассуждая и далее таким образом, придем к заключению, что если $p = \lambda_1$ — корень k -й кратности характеристического уравнения, то частный интеграл уравнения (16) выразится формулой:

$$y = \frac{bx^k}{f^{(k)}(p)} e^{px}. \quad (15)$$

Полученные результаты требуют проверки подстановкой в заданное уравнение, так как они найдены с помощью предельного перехода: дифференциальное уравнение, полученное из (10) переходом $p \rightarrow \lambda_1$, действительно является пределом первоначального, но отсюда еще не следует, что решение нового уравнения есть предел решения первоначального уравнения.

МЕТОДИКА

УСПЕВАЕМОСТЬ ПО МАТЕМАТИКЕ В ОБРАЗЦОВЫХ ШКОЛАХ РСФСР НА ОСНОВАНИИ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ, ПРОВЕДЕННЫХ НКП В НОЯБРЕ 1933 ГОДА

Н. Н. Никитин (Москва)

Контрольные работы по математике были поставлены в образцовых школах РСФСР в связи с проверкой работы образцовых школ и включением их в титульный список. Цель проведения контрольных работ сводилась к следующему: 1) выяснить, как образцовые школы выполняют установленные программы НКП, 2) насколько сознательно и прочно учащиеся усваивают проработанный материал.

ОРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ

Для изучения были намечены 2, 4 и 7-е классы по двум основным дисциплинам: математике и русскому языку. Содержание контрольных работ было составлено Центральной педагогической лабораторией НКП, просмотрено и одобрено практическими работниками московских и провинциальных школ, утверждено Школьным сектором НКП и в октябре 1933 г. разослано по краям и областям.

Составлена была также инструкция для проведения контрольных работ и формы для обработки результатов работ. Согласно этой инструкции работы должны были быть проведены в период времени между 20—30 ноября. Учитель должен был быть ознакомлен с инструкцией накануне проведения работы, чтобы иметь возможность подготовиться к инструктажу.

Содержание контрольных работ ни в коем случае не должно было быть заранее известно учащимся. Контрольные работы проводились самим учителем в тех естественных условиях, в которых протекает обычная работа учащихся. При выполнении контрольной работы была обеспечена самостоятельная работа каждого учащегося, с каковой целью задания были даны в двух вариантах, одинаковых по своей трудности. Во время проведения контрольной работы на уроке присутствовал представитель крайоно или роно, который не вмешивался в урок.

По окончании урока все работы отбирались, производилась тотчас же проверка их, заполнялась приложенная к инструкции учетная карточка, которая вместе с тремя ученическими работами (лучшего, среднего и слабого ученика) направлялась в крайоно. Краевые отделы народного образования делали сводку по краю и вместе с образцами работ направляли ее в НКП.

Всего контрольными работами было охвачено следующее количество групп и учащихся (см. табл. на стр. 50).

Работы были проведены в Москве, Ленинграде, 11 краях РСФСР и Чувашской АССР. Остальные края (Нижеволжский, Северокавказский, Дальневосточный, Уральская область) материалов по проведению контрольных работ не представили. Результаты проведенных работ сводятся к следующему:

2-е классы

По 2-м классам были даны следующие 12 примеров и 2 задачи:

$53 + 27 =$	$90 - 14 =$	$5 \times 9 =$	$25 : 5 =$
$56 + 8 =$	$84 - 7 =$	$4 \times 7 =$	$27 : 3 =$
$48 + 35 =$	$82 - 56 =$	$6 \times 9 =$	$42 : 6 =$

№	Классы и наименование работ	Количество охваченных	
		групп	учащихся
1	2-е классы: Примеры и задачи	155	5 662
2	4-е классы: Примеры и задачи	155	5 404
3	7-е классы: Алгебра и геометрия	99	3 173
		409	14 239

1-я задача. У Володи было 39 коп. Из них он истратил 24 коп. на цветные карандаши, а на остальные деньги купил перья по 3 коп. за перо. Сколько перьев купил Володя?

2-я задача. На мельницу привезли рожь на трех телегах и одном грузовике. На каждой телеге было по 5 мешков ржи, а на грузовике 22 мешка. На сколько больше мешков привезли на одном грузовике, чем на трех телегах вместе?

В итоге в среднем по РСФСР получились такие результаты:

№	Наименование работ	Число учащихся в %				Средний показатель в лучшем крае (%)	Средний показатель в наиболее отстающем крае (%)
		сделавших все без ошибок	не сделавших правильно ни одного примера	сделавших ошибки более чем в 50% примеров	сделали ошибки в вычислен., но ход решения задачи верен		
1	Примеры .	36,6	0,26	5,43	—	51	22,6
2	Задачи . .	51,3	—	—	6	73	39,9

Наиболее трудными для учащихся оказались обратные действия. Здесь получились такие показатели:

Ошибки на сложение	составляют 17,6% общего количества ошибок						
» » вычитание	»	34,3%	»	»	»	»	»
» » умножение	»	19,0%	»	»	»	»	»
» » деление	»	29,1%	»	»	»	»	»

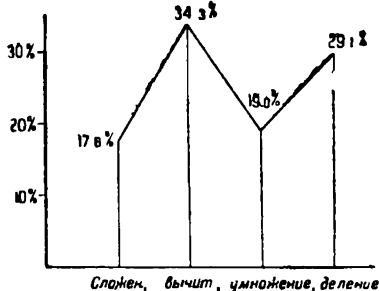
Колебание этих ошибок наглядно иллюстрирует фиг. 1.

Это наводит на определенные методические выводы. Очевидно, при проработке четырех арифметических действий следует уделять особое внимание усвоению обратных действий (вычитание и деление) как наиболее трудных. Обращают на себя внимание и те границы, в пределах которых колеблются показатели отдельных краев. В то время как лучшие края дали в среднем

81% учащихся, безошибочно выполнивших все примеры, — в отстающих краях средний процент снижается до 22,6%. Если обратиться к показателям отдельных школ, то получим еще более резкие расхождения. В то время как в передовых школах число учащихся, выполнивших безошибочно все примеры, достигает 90% и выше, слабые школы дают только 10% и даже ниже. В лучших школах учащиеся справлялись с заданием в 25—30 мин.

По линии задач колебания столь же значительны. В то время как в лучших краях средний процент учащихся, верно решивших обе задачи, достигает 73%, в худших краях он падает до 39,9%.

Если же обратиться к отдельным школам, то в лучших школах число учащихся, отлично справившихся с работой, доходит до 90%, а в слабых школах падает до 10% и ниже. Это говорит о чрезвычайной пестроте качества работы в отдельных образцовых школах РСФСР.



Фиг. 1.

4-е классы

Для учащихся 4-х классов были даны 7 следующих примеров и 1 задача:

- | | |
|------------------------------|--------------------------|
| 1) $3\ 501\ 000 - 79\ 037 =$ | 5) $31\ 480 : 370$ |
| 2) $785 \times 304 =$ | 6) Превратить в кг 25 г. |
| 3) $302 \times 250 =$ | 7) Найти 7% от 4 000. |
| 4) $56\ 289 : 647$ | |

Задача. Сарай размером в 384 м^3 наполнен на $\frac{3}{4}$ сеном. 1 м^3 сена весит 75 кг. На скольких телегах привезли сено, если в среднем на телегу клали 240 кг? В итоге в среднем по РСФСР получились такие результаты:

№	Наименование работ	Число учащихся в %				Средний показатель в лучшем крае (%)	Средний показатель в наиболее отстающем крае (%)
		сделавших все без ошибок	не сделавших правильно ни одного примера или действия в задаче	сделавших ошибки более чем в 50% примеров	сделали ошибки в вычислен., но ход решения верен		
1	Примеры	24,5	3,22	16,73	—	44,3	7,9
2	Задачи	35,3	22,5	—	20,6	56,1	18,4

Наибольшее число ошибок, сделанных учащимися, падает на пятый пример ($31\ 480 : 370$): деление с нулями на конце делимого и делителя, причем получается остаток. Чаще всего учащиеся при делении зачеркивали нули, делили 3 148 на 37 и получали в остатке 3 единицы, вместо 3 десятков.

Нередко встречались такие работы, где эти ошибки учителем не исправлялись, и пример считался решенным верно. Были и такие случаи, когда ученик написал в остатке 30, а педагог зачеркивал 0 и считал верно выполненное решение за ошибку. Повидимому, некоторые педагоги сами недостаточно уяснили для себя этот случай деления. Следующим по трудности оказался пример на вычитание с нулями в вычитаемом. Остальные примеры оказались по трудности примерно одинаковыми.

$$\begin{array}{r}
 31480 \mid 370 \\
 296 \\
 \hline
 188 \\
 185 \\
 \hline
 3
 \end{array}$$

Меньше всего сделано ошибок на нахождение заданного числа процентов от данного числа (7-й пример).

По 4-м классам, так же как и по 2-м классам, обращает на себя внимание огромное расхождение в показателях отдельных краев и школ. В то время как лучшие школы дают по примерам 85% и даже выше, а по задачам 96%, ряд отстающих школ дали по примерам и задачам процент безошибочного выполнения ниже 10. Есть отдельные школы, в которых не нашлось ни одного ученика, который бы сделал верно все примеры или решил верно задачу. Но и по 4-м группам подтверждается та же неоднородность и пестрота, отмеченная для 2-х классов. Некоторые школы совсем не прорабатывали деления целых чисел с остатком. Некоторые—не приступали к десятичным дробям.

7-е классы

Алгебра

По алгебре были даны следующие 6 примеров:

Сократить дроби:

$$1. \frac{2x^2 + 4xy}{3xy + 6y^2}.$$

$$2. \frac{25 - 49x^2}{49x^2 + 70x + 25}.$$

$$3. \frac{3a^3 + ab^2 - 6a^2b - 2b^3}{9a^5 - ab^4 - 18a^4b + 2b^5}.$$

Произвести указанные действия:

$$4. \frac{x(16-x)}{x^2-4} + \frac{3+2x}{2-x} - \frac{2-3x}{x+2} =$$

$$5. \frac{xy}{x+y} \cdot \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) =$$

$$6. \frac{a^3 + b^3}{a - b} : \frac{a + b}{a^3 - b^3}.$$

Все эти примеры были ориентированы на программы НКП и по времени проработки и по содержанию. Учащиеся 7-х классов должны были к концу ноября проработать и сознательно усвоить разложение на множители как путем вынесения общего множителя за скобки, так и путем применения формул сокращенного умножения и наконец путем группировки. Кроме того учащиеся 7-х классов должны были к этому времени проработать алгебраические дроби с многочленными знаменателями и уметь ответственно пользоваться знаками + и — при алгебраических преобразованиях. В примерах намеренно не было дано дробных или сколько-нибудь сложных коэффициентов с тем, чтобы не затруднять учащихся излишними арифметическими выкладками, а все внимание сосредоточить на выполнении указанных в задании операций с алгебраическими данными.

Примеры предварительно были рассмотрены преподавателями московских школ (Краснопресненского, Фрунзенского и Октябрьского районов), а также работниками провинциальных школ, причем общее заключение преподавателей сводилось к тому, что задание ориентировано на программы НКП и сильно для учащихся.

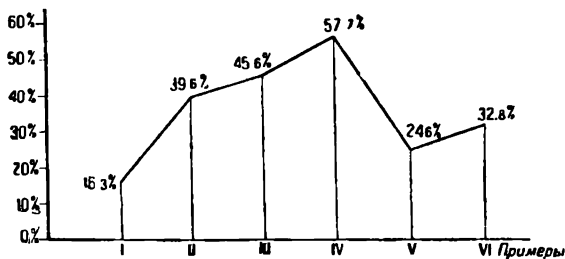
При составлении задания учитывалось также то обстоятельство, что выполнение его будет производиться учащимися образцовых школ, которые имеют все данные для того, чтобы дать более высокие показатели, нежели массовые рядовые школы. Кроме того, образцовые школы имели возможность выбрать для выполнения задания лучшую группу в школе.

В целях контроля работа была проведена в 7-м классе I опытной школы НКП имени Горького. 3 ученика выполнили всю работу безошибочно в

37—38 мин. Остальные учащиеся работали 40—45 мин. Хорошо выполненных работ оказалось 30%, удовлетворительно 50% и слабо 20%, причем к числу слабых отнесены те учащиеся, которые верно сделали только 3 примера из 6. Решивших верно менее 3 примеров не оказалось ни одного.

Для учета затраты времени на решение всех заданных примеров они были также предложены для решения учителю рядовой школы. Выполнение их с ответственностью за результат заняло у него 14 мин. Квалифицированный учитель II центра одной из опытных школ Москвы решил все примеры в 1½ мин. Таким образом имелись основания для того, чтобы рассчитывать на выполнение задания в целом если не средними, то во всяком случае лучшими учениками образцовых школ.

Интересно отметить, что один из учащихся Шихозадовской образцовой школы Чувашской АССР Евреев Михаил выполнил работу в течение 30 мин., не сделав ни одной серьезной ошибки.



Фиг. 2.

В общем итоги проделанной работы выражаются следующими данными.

Из 3 173 учащихся, принимавших участие в решении примеров, правильно выполнили все задание 13,5% (очень хорошие и хорошие ученики), не сделали правильно ни одного примера 193 ученика, что составляет по отношению к общему числу решавших 6,1% (это безусловно слабые учащиеся). 912 учащихся, что составляет 28,8%, сделали ошибки более чем в 50% заданных примеров, иными словами, сделали из 6 примеров верно только 1 или 2 примера. Таким образом процент слабых учащихся составляет в целом $6,1\% + 28,8\% = 34,9\%$.

Прилагаемый график показывает число ошибок, сделанных учащимися в отдельных примерах (см. фиг. 2).

Первые примеры, как более простые, дали меньший процент ошибок. Особенно много ошибок дал 4-й пример. Уменьшение ошибок по 5-му и 6-му примерам объясняется тем, что: во-первых, они решались не всеми учащимися, а во-вторых, тем, что до последних примеров добрались, несомненно, лучшие учащиеся, которые естественно должны были дать меньшее количество ошибок.

КАК РАСПРЕДЕЛЯЮТСЯ ОШИБКИ

Если общее количество ошибок (6 554) принять за 100%, то по отдельным видам ошибки распределяются следующим образом: неправильное сокращение дробей—18,4%, неправильное разложение на множители—45,4%, неправильное выполнение действий (сложения, вычитания, умножения и деления)—10,7%, ошибки в знаках и прочие ошибки—25,5%.

Ошибки в 1-м примере

В первом примере требовалось разложить на множители числитель и знаменатель дроби и сократить ее на многочленный сомножитель. Решение сводилось к следующему:

$$\frac{2x^2 + 4xy}{3xy + 6y^2} = \frac{2x(x + 2y)}{3y(x + 2y)} = \frac{2x}{3y}.$$

Этот пример был наиболее простым и дал наименьшее число ошибок. Но все же и он показал, что не все учащиеся сознательно усвоили даже такой простой способ разложения, какой имел место в данном примере, и не все учащиеся понимают, как следует производить сокращение дробей.

Число учащихся, неправильно разложивших числитель и знаменатель на множители, составляет 4,2%.

Число учащихся, неправильно сокративших дробь, составляет 5,2%.

Прочие ошибки 6,9%.

Встречаются в ряде школ разных областей такие ошибки:

$$1) \frac{2x^2 + 4xy}{3xy + 6y^2} = \frac{x^2 + 4}{3 + 3y^2} \quad \text{или} \quad 2) \frac{2x^2 + 4xy}{3xy + 6y^2} = \frac{2x+2x}{3y+3y} = \frac{4x}{6y},$$

$$3) \frac{4y^2 + 2xy}{8xy + 4x^2} = \frac{y^2}{4 + x^2}, \quad 4) \frac{4y^2 + 2xy}{2} = 2y^2 + 2xy.$$

В данных примерах и подобных им учащиеся показали непонимание сокращения дробей и неумение разложить многочлен (в данном случае двучлен) на множители способом вынесения общего множителя за скобки. Эти ошибки встречаются во всех краях и областях.

Встречаются ошибки и такого рода:

$$\frac{4y^2 + 2xy}{2} = \frac{2y + x}{2} = \frac{y + x}{1} = y + x.$$

Ученик сначала сократил слагаемые в числителе на $2y$, не изменяя знаменателя, затем решил сократить во втором звене на 2 одно из слагаемых числителя со знаменателем и наконец вывел «ответ».

Или еще примеры:

$$\frac{2x^2 + 4xy}{3xy + 6y^2} = \frac{(x + 2y)^2}{(3x + 3y)^2},$$

$$\frac{4y^2 + 2xy}{2} = \frac{6y^3x}{2} = 3y^3x.$$

В последнем примере оказалось непонимание алгебраического сложения. Члены в числителе не являлись подобными, тем не менее они соединены в один и кроме того соединены путем сложения коэффициентов и показателей.

В некоторых работах учащиеся разложение сделали правильно, но не сделали сокращения:

$$\frac{4y^2 + 2xy}{2} = \frac{2y(2y + x)}{2}.$$

В общем показатели, полученные по 1-му примеру, заставляют заострить внимание преподавателей на существенных дефектах, имеющихся у довольно значительной части учащихся, по простейшим случаям разложения многочленов и сокращения дробей.

2-й пример

В данном примере требовалось сократить дробь, у которой числитель представлял собой разность квадратов, знаменатель — развернутый квадрат суммы двух количеств. Решение сводилось к следующему:

$$\frac{25 - 49x^2}{4x^2 + 70x + 25} = \frac{(5 - 7x)(5 + 7x)}{(7x + 5)^2} = \frac{5 - 7x}{7x + 5}.$$

Этот пример был несколько сложнее первого примера. Требовалось от учащихся четкое умение разложить многочлен на множители, основываясь на формулах сокращенного умножения, и затем сознательное выполнение сокращения дробей.

Число учащихся, допустивших ошибки в этом примере, выражается следующими данными:

Неправильно сократили	11,4% учащихся
Неправильно разложили на множители . .	19,2% »
Прочие ошибки составляют	9,0% »

Здесь ошибки в значительной степени повторяют то, что уже наблюдалось в первом примере. В ряде работ встречаются такие неправильности в различных вариантах:

$$\frac{25 - 49x^2}{49x^2 + 70x + 25} = \frac{25}{70x + 25} = \frac{1}{70x} \quad \text{или} \quad \frac{25 - 49x^2}{49x^2 + 70x + 25} = 70x.$$

Опять учащиеся сокращают числитель и знаменатель дроби на отдельные слагаемые, не считаясь даже со знаками. Иногда знаменатель переносится на место числителя. Ошибки типичны почти для всех краев. Есть работы, в которых учащиеся не полностью сокращают (как и в предшествующих работах), а только на одинаковые числовые слагаемые, например:

$$\frac{25 - 49x^2}{49x^2 + 70x + 25} = \frac{-49x^2}{49x^2 + 70x} = \frac{-49x^2}{7x(7x + 10)}.$$

Встречается непонимание формул, данных в примере, например:

$$\frac{25 - 49x^2}{49x^2 + 70x + 25} = \frac{(5 + 7x)^2}{(7x + 5)^2};$$

или

$$\frac{25 - 49x^2}{49x^2 + 70x + 25} = \frac{(5 - 7)^2}{(7 + 5)^2}.$$

Есть и такое выполнение примера:

$$\frac{36y^2 + 48y + 16}{16 - 36y^2} = \frac{100y^2}{-20y^2} = \frac{5y}{1} = 5y.$$

Здесь сложены вместе и коэффициенты и показатели.

Иногда сокращение не доводится до конца, например: $\frac{4(3y + 2)^2}{4(2 - 3y)}$ оставляется как окончательный результат, без дальнейшего сокращения (на 4).

Ошибки, встречающиеся в этом примере, указывают на недостаточное усвоение формул сокращенного умножения. Учащиеся если и умеют находить прямой результат:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{или} \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

то не умеют выполнить обратное преобразование. Снова подтверждается и на этом примере непонимание сокращения дробей, снова сокращают на слагаемые, не разлагают предварительно числитель и знаменатель на сомножители. Общее число ошибок составляет по этому примеру 39,6%.

3-й пример

Третий пример требовал от учащихся умения разложить довольно элементарный многочлен, состоящий из четырех одночленов, на множители, путем группировки и двукратного вынесения общего множителя за скобки. Кроме того, в одном случае требовалось поставить перед скобкой знак минус и у соответствующих членов, заключаемых в скобки, переменить знаки на обратные. Решение сводилось примерно к следующему:

$$\frac{3a^3 + ab^2 - 6a^2b - 2b^3}{9a^6 - ab^4 - 18a^4b + 2b^5} = \frac{3a^2(a - 2b) + b^2(a - 2b)}{9a^4(a - 2b) - b^4(a - 2b)} = \frac{(a - 2b)(3a^2 + b^2)}{(a - 2b)(9a^4 - b^4)} = \frac{1}{3a^2 - b^2}.$$

Для правильного решения этого примера учащиеся должны были отнестись к работе не механически, а продуманно, сознательно. Число ошибок в этом примере больше, чем в предшествующих.

Неправильно сократили	11,3% учащихся
Неправильно разложили на множители	21,7% »
Прочие ошибки составляют	12,6% »

И здесь, как в предшествующих примерах, некоторые учащиеся производили сокращение, не разложив числитель и знаменатель на множители. Нередко учащиеся, заключая ту или иную часть многочлена в скобки, ставя перед скобкой минус, не меняют знаки на обратные у всех одночленов, заключаемых в скобки, а делают это чисто механически. Есть затем совершенно непонятные записи, говорящие о полном отсутствии сознательного отношения к выполняемой работе. Например:

$$\frac{3a^3 + ab^2 - 6a^2b - 2b^3}{9a^5 - ab^4 - 18a^4b + 2b^5} = \frac{4a^3b^2 - 8a^2b^4}{9a^5 - 18a^5b^5 + 2b^5}.$$

Кое-где подсуммированы коэффициенты, а кое-где показатели степеней.

Нередки случаи, когда учащиеся, как и в предшествующих примерах, не доводят работу до конца. Например, оставляют без дальнейшего преобразования такое выражение:

$$\frac{3a^2 + b^2}{9a^4 - b^4}.$$

Общее количество учащихся, сделавших ошибки в этом примере, составляет 45,6%.

4-й пример

Четвертый пример требовал от учащихся умения произвести сложение и вычитание алгебраических дробей, причем общим знаменателем этих дробей являлась разность квадратов ($x^2 - 4$), одна дробь имела знаменателем $2 - x$, а другая $x + 2$. При приведении дробей к общему знаменателю в одной дроби нужно было переменить в знаменателе знаки на обратные. Решение сводилось примерно к следующему:

$$\begin{aligned} \frac{x(16 - x)}{x^2 - 4} + \frac{3 + 2x}{2 - x} - \frac{2 - 3x}{x + 2} &= \frac{x(16 - x) - (3 + 2x)(x + 2) - (2 - 3x)(x - 2)}{x^2 - 4} = \\ &= \frac{16x - x^2 - 7x - 2x^2 - 6 - 8x + 3x^2 + 4}{x^2 - 4} = \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{x + 2}. \end{aligned}$$

Некоторые учащиеся переменили знаки на обратные в знаменателе первой дроби, что было несколько экономнее.

Для правильного решения этого примера учащиеся должны были особенно ответственно и сознательно подойти к перемене знаков. Число ошибок в этом примере достигло наивысшего предела.

Произвели неправильно сокращения	4,5% учащихся
Сделали ошибки в разложении на множители	27,6% »
Прочие ошибки	25,6% »

И здесь учащиеся производили сокращение слагаемых, а не множителей, как и в предшествующих примерах, но больше всего ошибок сделано при

приведении к общему знаменателю. Чаще всего учащиеся не считались с тем, что во втором примере знаменатель требовал перемены знаков, а механически умножали на дополнительный множитель, например:

$$\frac{x(16-x)}{x^2-4} + \frac{3+2x}{2-x} - \frac{2-3x}{x+2} = \frac{x(16-x) + (3+2x)(2+x) - (2-3x)(x-2)}{x^2-4}$$

и т. д. Иногда, меняя знаки в знаменателе на обратные, делали это только в одном слагаемом, т. е., вместо того чтобы писать: $x-2$, писали: $x+2$ (2-я дробь). Наблюдаются и совершенно нелепые записи. Для многих учащихся характерным является недоведение работы до конца, например: дробь $\frac{x-2}{x^2-4}$ оставляется без дальнейшего преобразования.

5-й пример

В пятом примере требовалось сначала сделать вычитание дробей с одночленными знаменателями, а затем произвести умножение. Решение сводилось к следующему:

$$\frac{xy}{x+y} \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) = \frac{xy}{x+y} \cdot \frac{x^2-y^2}{xy} = x-y.$$

Некоторые учащиеся (до 15%) делали умножение более длинным путем, умножали почленно, сначала на $\frac{x}{y}$, а затем на $-\frac{y}{x}$. Ошибки, допущенные учащимися в этом примере, сводятся к следующему:

Сделали ошибки в сокращении дроби 10,9% учащихся
Неправильно произвели самое умножение и
— прочие ошибки 13,7% »

6-й пример

Шестой пример был дан на деление дробей, причем здесь требовалось также умение разложить на множители сумму и разность кубов, а также знание произведения суммы двух количеств на их разность. Пример сводился к следующему:

$$\frac{x^3-y^3}{x+y} : \frac{x-y}{x^3+y^3} = \frac{x^3-y^3}{x^2-y^2} = x^4+x^2y^2+y^4.$$

Во всех представленных материалах учащиеся выполняли пример более длинным путем, а именно:

$$\frac{x^3-y^3}{x+y} : \frac{x-y}{x^3+y^3} = \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x-y)}$$

$$= x^4 + x^3y + x^2y^2 - x^3y - x^2y^2 - xy^3 + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = x^4 + x^2y^2 + y^4.$$

В исключительно редких случаях учащиеся выполняли пример первым — более коротким и рациональным способом. Число учащихся, допустивших ошибки при решении этого примера, выражается следующими данными:

Сделали ошибки в разложении на множители . . 14,9% учащихся
Неправильно сократили 6,7% »
Неправильно произвели деление 11,2% »

Общий процент ошибок составляет 32,8%; значительно выше числа ошибок по предыдущему примеру на умножение (24,6%). Анализ ошибок, допущенных учащимися в разных школах краев и областей РСФСР, тщательное изучение представленных вместе со сводками работ дают основание сделать вывод, что значительная часть учащихся или совсем не усвоила алгебраических преобразований и действий над алгебраическими дробями, или усвоила их чисто механически, несознательно. Между тем к теме: «Алгебраические дроби с многочленными компонентами» учащиеся готовились ряд лет.

На 5-м году обучения они проработали арифметические дроби. На 6-м году обучения в программе указаны дробные алгебраические выражения с одночленными знаменателями, действия с которыми затем должны были быть закреплены при решении числовых и буквенных уравнений 1-й степени. Формулы сокращенного умножения:

$$(a \pm b)^2; (a + b)(a - b); (a \pm b)^3$$

также значатся в программе 6-го года обучения, равно как значится и разложение многочлена на множители путем вынесения одночленного множителя за скобки.

Таким образом в задачу первой четверти учебного года по 7-му году обучения входило:

1) Повторить материал предшествующих лет и

2) Дополнить знания учащихся по линии разложения многочленов на множители: а) введением таких примеров, где нужно было применить знание формул сокращенного умножения для преобразований обратного порядка, и б) усвоением приема разложения многочлена на множители путем группировки.

Это давало возможность синтезировать знания учащихся по линии алгебраических дробей, закончить этот раздел и подготовить учащихся к прохождению дальнейших разделов математики. Задолженность здесь совершенно недопустима, как недопустима, например, задолженность:

по 1-й группе по линии табличного сложения и вычитания,

по 2-й группе по линии таблицы умножения и т. д.

Недостаточное усвоение одних разделов мешает сознательному и быстрому продвижению учащихся по выполнению дальнейших разделов программы, создает тягучесть, топтание на месте, отсутствие интереса, задержку развития мышления.

Не следует, однако, думать, что среди образцовых школ не было таких, которые дали бы хорошие показатели. Наряду со школами, давшими низкие показатели, почти во всех краях и областях имеются школы, которые нормально прорабатывают программный материал и дают хорошие показатели по качеству усвоения проработанного материала.

Ниже помещаются показатели, данные передовыми школами РСФСР. Такие школы имеются почти во всех краях и областях (см. табл. на стр. 57).

7-е классы

Геометрия

По геометрии для учащихся 7-х групп на 45-минутный урок были даны следующие задачи:

1) «Две хорды, пересекающиеся внутри круга, делят окружность в отношении: 2:6:3:7. Определить величину углов, образуемых этими хордами».

Чтобы обеспечить самостоятельную работу учащихся, была дана аналогичная задача во втором варианте. От учащихся для решения этой задачи требовалось умение разделить число в данном отношении и знание раздела об измерении углов, в частности углов, вершина которых находится внутри круга. Чтобы не затруднять учащихся вычислительными операциями, преднамеренно были даны такие числовые данные, которые при вычислении приводили к целым результатам.

№	Наименование школ	Область, край	Число учащихся в %			Общий процент слабых учащихся
			сделавших верно все примеры	не сделавших верно ни одного примера	сделавших ошибки более чем в 50% примеров	
1	1-я обр. школа СОНО	Москва	54,5	0	0	0
2	25-я обр. школа ОкОНО	Москва	44,4	0	3,8	3,8
3	134-я обр. школа	Ленинград	48,6	0	0	0
4	120-я обр. школа	Ленинград	35,2	0	0	0
5	В.-Луки ФЗД 1	Западная область	51,7	0	0	0
6	Ст. Урманская	Чувашская АССР	50,0	0	0	0
При средн.		% по РСФСР	13,5	6,1	28,8	34,9

В дополнение к первой задаче учащимся была дана вторая задача на построение:

2) «Построить треугольник по стороне a , прилежащему углу b и высоте h_a ».

Для второго варианта была дана задача: «Построить треугольник по стороне c , прилежащему углу A и сумме двух других сторон».

Задача во втором варианте значительно труднее первой и была дана с целью выяснить, смогут ли с ней справиться хотя бы лучшие учащиеся образцовых школ. Для решения этих задач требовалось знание основных приемов, нужных для решения задач на построение: умение начертить отрезок, равный данному; угол, равный данному; значение основных геометрических мест: а) прямая, параллельная данной, и б) перпендикуляр к отрезку, проведенный через его середину.

Первую задачу выполнили верно в среднем по РСФСР 49,4% учащихся. Вторую задачу (по обоим вариантам вместе) 33,7%.

Эти показатели являются основными. Они вообще характеризуют состояние геометрических знаний в образцовых школах, главным образом применительно к тем вопросам, которые были предметом проверочных работ; но до некоторой степени они дают основание сделать заключение и вообще о знаниях и математическом развитии учащихся. Показатели, данные образцовыми школами, нельзя считать высокими. 49,4% для первой задачи — это невысокий процент. Задача была несложна. Очевидно, в массе образцовые школы еще не овладели в достаточной степени геометрическими знаниями, чтобы хорошо справиться с такой нетрудной задачей.

Вторая задача дала еще более низкий процент. Только $\frac{1}{3}$ учащихся справилась с работой. Все остальные учащиеся или не решали 2-й задачи, или не справились с ней.

Число ошибок, сделанных в 1-й задаче, выражается следующими данными:

Сделали ошибки в вычислении дуг	5,6% учащихся
Сделали ошибки в вычислении углов	28,4% »
Прочие ошибки составляют	15,5% »

Какие ошибки являются наиболее характерными из числа допущенных учащимися при решении этой задачи?

1) Учащиеся неправильно производили вычислительные операции. Например, встречаются такие ошибки:

$$\frac{120 + 140}{2} = 80 \text{ вместо } 130,$$

$$\frac{144 + 72}{2} = 103 \text{ вместо } 108,$$

$$\frac{48 + 90}{2} = 64 \text{ вместо } 69,$$

$$\frac{90 + 144}{2} = 99 \text{ вместо } 117.$$

Встречаются ошибки, аналогичные тем, которые имели место при выполнении работы по алгебре. Учащиеся сокращали дроби на слагаемые. Например:

$$\frac{27}{\frac{54 + 72}{2}} = 99 \text{ вместо } \frac{54 + 72}{2} = \frac{126}{2} = 63.$$

$$\frac{90 + 144}{\frac{72}{2}} = 112 \text{ вместо } 117.$$

Есть записи, показывающие неправильное применение знака равенства:

$$90 + 144 = 234 : 2 = 117$$

$$54 + 72 = 128 : 2 = 64$$

(кроме того, ошибка в подсчете).

Легкие вычисления учащиеся производят письменно с подробной записью, когда это можно сделать в уме. Действия иногда выполняются крайне примитивно. Учащиеся не приучены четко, в определенном порядке записывать последовательно все вычисления, нужные для решения задачи. Иногда небрежно пишутся цифры. Неправильно пишется знак угла, вместо $\angle A$ пишется $\surd A$.

2) При вычислении дуг значительное количество учащихся не пользовалось уравнениями, а решало задачу «на части». Вместо того чтобы из уравнения $2x + 6x + 3x + 7x = 360^\circ$ найти x , а затем определить величину каждой дуги, учащиеся просто складывали: $2 + 6 + 3 + 7 = 18$.

Находим сумму частей, затем 1 часть и т. д.

Встречаются записи такого рода $18 = 360^\circ$.

$$2a + 6b + 3c + 7d = 18.$$

$$a = \frac{360 \cdot 2}{18} = 40^\circ, \quad b = \frac{360 \cdot 6}{18} = 120^\circ,$$

$$c = \frac{360 \cdot 3}{18} = 60^\circ, \quad d = \frac{360 \cdot 7}{18} = 140^\circ.$$

3) При вычислении углов учащиеся допустили больше всего ошибок (фиг. 3).

Нередко учащиеся заданные углы принимали за центральные и, определив их величину, поясняли: «сколько дуговых градусов в дуге, столько угловых» (в угле). При этом бросается в глаза, что учащиеся не пользуются свойствами смежных и противоположных углов для проверки полученного результата. Это характерно для многих учащихся.

Ряд учащихся получили для углов такие результаты:

50°; 60°; 40°; 50° (в сумме 200°)
 33°; 60°; 70°; 20° (в сумме 180°)
 54°; 45°; 39°; 72° (в сумме 207°)
 130°; 160°; 140°; 110° (в сумме 540°)

противоположные углы не равны ни в одном случае и сумма их нигде не равна 4d.

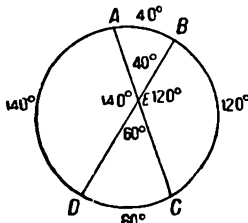
Иногда заданные углы учащиеся считали за вписанные и определяли их путем деления числа градусов дуги на 2, полученный результат также не подвергали проверке. Например, имея дуги в 140°, 120°, 40°, 60°, стягиваемые ими углы определяли в 70°, 60°, 40°, 30°, тогда как одна пара углов должна была получиться по $\left(\frac{140 + 40}{2} = 90^\circ\right)$ и другая пара тоже по 90°)

$$\frac{120 + 60}{2} = 90^\circ.$$

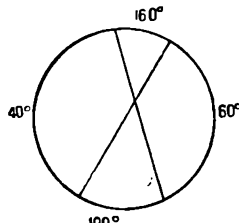
4) Чертежи зачастую не соответствуют заданию и обозначению. Например: дуга, имеющая 8 частей (160°), меньше дуги, имеющей 2 части (40°). Острый угол имеет 126°, а тупой, смежный ему, 54° (фиг. 4).

5) При вычислении углов мало кто пользовался свойствами смежных и противоположных углов. Между тем в данной задаче важно было определить один угол, а остальные углы определить уже было легко на основе свойств указанных углов.

6) Иногда учащиеся определяли только дуги и этим ограничивались, полагая, что задача решена. Или, сразу вычисляя дуги, обозначали вместо них углы.



Фиг. 3.



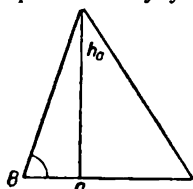
Фиг. 4.

7) В некоторых случаях учащиеся, определяя величину заданных углов, брали не полусумму противолежащих дуг, а полусумму смежных дуг.

8) Имеются и совершенно нелепые записи.

Вторая задача

Здесь требовалось или построить треугольник по основанию (a), прилежащему углу (B) и высоте (h_a), или построить треугольник по основанию, прилежащему углу и сумме двух других сторон. Первая задача решалась просто и не требовала особой сообразительности. Нужна была элементарная геометрическая грамотность, применительно к нормальным знаниям и развитию учащихся 7-го года обучения. Вторая задача требовала значительно большей сообразительности.



Фиг. 5.

Число учащихся, допустивших ошибку при решении I варианта второй задачи, составляет 21,3%, а по II варианту 26,5%. В общей сложности это дает 47,8%. Если этот показатель сложить с числом учащихся, правильно решивших вторую задачу в том или ином варианте, получим процент учащихся, вообще решавших эту задачу (47,8% + 33,7% = 81,5%). Многие школы, видимо, совершенно не приступали к решению второй задачи ни в первом, ни во втором варианте.

Здесь прежде всего бросается в глаза неподготовленность учащихся к решению задач на построение вообще и в частности неумение пользоваться методом геометрических мест. По программе НКП тема: «Окружность и круг» и «Геометрические места» поставлена в самом начале 7-го года обучения. Если этот материал не уложился в первую четверть, то он во всяком случае

должен был быть проработан к концу ноября, когда проводились проверочные работы. Дальше по программе идут две большие темы: «Пропорциональные отрезки и подобие фигур» и «Метрические отношения в треугольнике и круге».

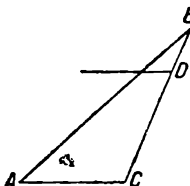
Некоторые школы просто указывают, что этого раздела не проработали, некоторые объясняют объективными причинами. Задолженность первой трети учебного года (уже не четверти), несомненно, должна будет сказаться на проработке последующих тем.

Почти нигде учащиеся не прибегают при выполнении задания к предварительному анализу или разбору задачи; построение и доказательство имеют ряд дефектов, и почти нигде нет исследования условий, при которых решение возможно, а также нет определения числа возможных решений. Даже в тех работах, которые считаются выполненными правильно, встречаются такие недочеты:

1) Учащиеся не отличают отрезка от прямой. Заданные отрезки не ограничены.

2) Встречаются такие работы, где сумма двух сторон треугольника задана меньше третьей стороны.

3) В работе написано: разделим BC пополам и проведем к ней через середину D перпендикуляр. На чертеже это получается так (фиг. 6).



Фиг. 6.

Ни середины BC , ни перпендикуляра к ней не чувствуется.

4) Встречаются такие выражения: «И в эту сторону восстанавливаем перпендикуляр»... «Проводим к концу основания перпендикуляр»... «На основании строим угол»... «Построила угол A на конце сторон»... и т. д.

Анализ работ по геометрии говорит о том, что выполнение программ во многих школах задерживается, материал учащимися в значительной части не осознан. Учащиеся не приучены к тому, чтобы проверять выполненную работу, отвечать за полученный результат. Слабо поставлено выполнение чертежей. При вычислительных операциях сказывается низкая вычислительная культура.

Если учащиеся еще до некоторой степени справляются с геометрическими задачами на вычисление, то с задачами на построение большинство из них не справляется, а многие школы совсем не упражняют учащихся в решении задач на построение.

Но наряду со слабыми школами есть немало школ которые дали очень хорошие показатели. Очевидно, здесь прорабатываются программы нормально, и учащиеся достаточно упражняются в решении задач. Такие школы имеются во всех краях и областях. Например:

№	Наименование школы	Число учащихся в %	
		решивших верно 1-ю задачу	решивших верно 2-ю задачу
1	25-я Московская обр. школа	91,9	91,9
2	120-я Ленинградская школа	79,5	85,2
3	2-я Рязанская Моск. области	76,7	93,3
4	25-я Самарская Средневожского края	83,3	95,8
5	Лоскинская обр. школа ЦЧО	92,3	84,6
6	Невельская ФЗД Западной области	91,2	55,9
7	Владимирская ФЗД № 1 Ив.-пром. обл.	43,7	59,4
8	Старо-Урманская Чувашской АССР	64,3	53,6

Любопытную картину дает сопоставление успеваемости по отдельным группам. Если взять показатели по решению примеров, то получается такая картина:

Успеваемость по 2, 4 и 7-м классам в образцовых школах РСФСР по итогам контрольных работ, проведенных НКП в ноябре 1933 г., по математике:

2-е классы

1) Число учащихся, не сделавших верно ни одного примера, составляет	0,26%
2) Число учащихся, сделавших ошибки более чем в 50% примеров	5, 5%
3) Число учащихся, выполнивших половину или более половины примеров	57, 7%
4) Число учащихся, выполнивших верно все примеры	36, 6%

4-е классы

По тем же пунктам показатели следующие:

1)	3, 2%
2)	16, 8%
3)	55, 5%
4)	24, 5%

7-е классы

По тем же пунктам показатели следующие:

1)	6, 1%
2)	28, 8%
3)	51, 6%
4)	13, 5%

Из этой таблицы видно, что число слабых учащихся, начиная от 2-й группы, постепенно растет. Что же касается учащихся, хорошо справляющихся с программой, то число их выражается следующими данными: 36,6%; 24,5% и 13,5%, т. е. процент их постепенно падает. Очевидно, 2-е классы работают более нормально, а по 4 и 7-м классам сказывается задолженность предшествующих лет. Встает вопрос и о необходимости проверки распределения программного материала.

ВЫВОДЫ

Подводя итоги показателям, полученным в связи с проведением контрольных работ, можно сделать некоторые выводы прежде всего для 7-х классов образцовых школ, а затем эти выводы можно до некоторой степени распространить и вообще на состояние математики в школах ФЗД.

Предварительно следует остановиться на том, насколько объективен тот материал, который получен в итоге проведения контрольных работ, и насколько дает он право на те или иные заключения. Объективность его обеспечивалась прежде всего теми мероприятиями, которые были предусмотрены в инструкции (участие представителя роно, устранение возможности списывания и т. д.). Следует, кроме того, отметить то обстоятельство, что показатели, полученные по линии математики, в значительной степени совпадают с показателями, которые были получены по линии русского языка. Чаще всего те школы, которые дали хорошие результаты по контрольным работам в области математики, давали высокие показатели и по линии русского языка, и, наоборот, плохие показатели по математике соответствовали слабым показателям в области русского языка.

Затем при обработке всех материалов, связанных с оценкой той или иной школы (материальные средства, здание, оборудование, руководство, состав преподавателей, учебно-воспитательная работа, методическая работа и пр.)

сомнения, которые возникали по линии образцовости школ, чаще всего относились к тем школам, которые дали низкие показатели по контрольным работам, и, с другой стороны, в тех школах, где имелись хорошие показатели по контрольным работам, почти всегда имели место: хорошее руководство, плановость в учебно-воспитательной работе, налаженность материально-хозяйственной жизни школ и т. д.

Можно было бы привести еще целый ряд фактов, которые подтверждают одну основную мысль, что материал, полученный в итоге проведения контрольных работ, достаточно объективен и дает право на вытекающие из него выводы.

Выводы эти сводятся к следующему:

1) Ряд образцовых школ имеют бесспорные и несомненные достижения в деле овладения программным материалом. В ряде школ учащиеся вполне прочно и сознательно владеют пройденным материалом, умеют его применять, обосновать. Записи в работах говорят о привычке четко, чисто, аккуратно и ответственно выполнять заданную работу.

2) Наряду с этим следует отметить:

а) По степени математических знаний образцовые школы представляют чрезвычайно неоднородную картину. В то время как одни школы дают прекрасные показатели, другие школы совершенно не справляются с работой, дают крайне низкие показатели. Эта пестрота характерна и для краев и областей, и для отдельных школ в тех или иных краях, и для различных групп в отдельных школах. Образцовые школы еще не идут единым развернутым фронтом по линии повышения качества работы, а линия продвижения их характеризуется резкими контрастами. В то время как лучшие школы дают показатели в 60%, 70%, 80% и даже 90%, худшие школы дают очень низкий процент учащихся, верно решивших примеры и задачи. Встречаются такие школы, где нет ни одного ученика, который справился бы с заданием в целом.

б) Выполнение программ во многих школах запаздывает.

в) Показатели, даваемые образцовыми школами в своих отчетах, значительно повышены.

г) Качество и прочность знаний учащихся оставляют желать лучшего. В ряде школ учащиеся допускают такие ошибки, которые говорят о недостаточно сознательном и прочном усвоении знаний.

д) Мало внимания обращается на решение задач.

е) В ряде образцовых школ еще недостаточно ведется борьба за чистую и аккуратную запись, за хороший чертеж, за ответственное выполнение порученного задания.

Преодоление указанных недостатков должно быть предметом повседневной и напряженной работы отстающих образцовых школ, чтобы и они наряду с лучшими школами встали впереди массовых школ и получили право быть в рядах ведущего звена в области народного образования.

ЗАДАЧИ

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

(Метод неопределенных коэффициентов)

1. Мы сначала напомним некоторые определения. Численным значением алгебраического выражения называют число, которое получается после замены всех букв, входящих в выражение, числами и выполнения указанных операций.

Численное значение алгебраического выражения обыкновенно меняется при изменении системы значений, придаваемых буквам; но может случиться, что алгебраическое выражение имеет постоянное числовое значение; например, численное значение выражения

$$\frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{a^2 + b^2}$$

всегда равно 2.

Говорят, что два алгебраических выражения *равны*, если они получают равные численные значения при любых значениях, придаваемых буквам, входящим в эти выражения.

Равенство между алгебраическими выражениями называют тождеством.

2. Алгебраические операции состоят в преобразованиях данных выражений в равные им выражения; иными словами, каждой алгебраической операции соответствует тождество между первоначально взятым выражением и тем, которое получается в конце концов, и это тождество дается обыкновенно в виде правила выполнения операции.

Так, правило умножения $a + b$ на $a - b$ выражается формулой:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Но это равенство, которое показывает, что произведение, стоящее в левой части, и разность, стоящая в правой части, равны, показывает в то же время, как можно, зная одно из этих двух выражений, перейти к другому. Итак, оно дает правило разложения разности квадратов на множители, а также правило разложения некоторого произведения на разность квадратов. Практически весьма полезны упражнения, в которых одному и тому же алгебраическому выражению приходится придавать различные формы, которые оно способно принять, потому что в соответствии с условиями задачи та или другая форма может оказаться более или менее удобной.

3. Нахождение алгебраического выражения данного вида приводится к решению следующей задачи.

Найти алгебраическое выражение известного вида, которое удовлетворяет данным условиям.

Например, деление многочлена A на многочлен B сводится к отысканию многочлена Q (если он существует), такого, что многочлен A равен произведению $B \cdot Q$.

Часто бывает удобно вместо выполнения операций по правилам, аналогичным правилам арифметических операций, писать равенство, соответствующее выполняемой операции, заменяя неизвестные коэффициенты буквами; потом это равенство преобразуют в эквивалентное, имеющее в каждой части многочлен, и пишут, что коэффициенты подобных членов равны. В этом случае равенство делается тождеством. Мы не можем рассматривать теорию этого вопроса во всей общности; мы ограничимся лишь примером.

4. Пусть

$$\begin{aligned} A &= x^4 + x^2 + 1, \\ B &= x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

Можно предвидеть, что если многочлен Q существует, то он должен быть многочленом второй степени, потому что степень $B \cdot Q$ равна сумме степеней B и Q ; поэтому Q можно представить так:

$$Q = ax^2 + bx + c.$$

Пишем равенство:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(ax^2 + bx + c).$$

Выполняя вычисления во второй части, получаем:

$$ax^4 + (a + b)x^3 + (a + b + c)x^2 + (b + c)x + c.$$

Сравнивая коэффициенты этого многочлена с коэффициентами многочлена

$$x^4 + x^2 + 1,$$

имеем:

$$a = 1, \quad a + b = 0, \quad a + b + c = 1, \quad b + c = 0, \quad c = 1.$$

Из первых трех уравнений легко находим коэффициенты:

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = 1$$

и убеждаемся, что значения этих коэффициентов удовлетворяют также двум последним уравнениям. Итак, при делении многочлена $x^4 + x^2 + 1$ на $x^2 + x + 1$ получается частное $x^2 - x + 1$.

5. *Найти условие, при котором $x^4 + ax^2 + bx + c$ делится на $(x-1)^3$.* Частное должно быть первой степени; поэтому можно написать:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = (x-1)^3(mx + n).$$

Возводя в куб $(x-1)$ и умножая на $(mx+n)$, получаем:

$$mx^4 + (n-3m)x^3 + (3m-3n)x^2 + (3n-m)x - n.$$

Теперь, сравнивая коэффициенты, получаем:

$$m=1, \quad n-3m=0, \quad 3m-3n=a, \quad 3n-m=b, \quad -n=c,$$

откуда легко находим:

$$m=1, \quad n=3, \quad a=-b, \quad b=8, \quad c=-3.$$

Следовательно,

$$x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x-1)^3(x+3).$$

ЗАДАЧИ

Решение нижеследующих задач предлагается присылать в редакцию по адресу: Москва, Центр, Комсомольский, 6, ГГТИ. В редакцию «Математического просвещения». Лучшие решения будут напечатаны в следующих выпусках сборника.

1

1. Доказать, что если из любого трехзначного числа вычесть число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке, и к полученному числу прибавить число, написанное такими же цифрами, но в обратном порядке, то в сумме получится 1089. Например:

$$864 - 468 = 396; \quad 396 + 693 = 1089.$$

2. Доказать, что при всяком целом n десятичная дробь, в которую обращается сумма дробей:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2},$$

будет смешанной периодической.

3. Даны две пропорции:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}.$$

Найти условие, при котором четыре числа $a + a'$, $b + b'$, $c + c'$, $d + d'$ тоже образуют пропорцию.

4. Пусть Q — отношение общего наименьшего кратного двух чисел A и B к их общему наибольшему делителю. Найти A и B , зная, что $Q = 120$; $A + B = 667$.

5. Показать, что числа вида $n^6 + 2n^5 - n^2 - 2n$ делятся на 120 при целом n .

6. Решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} x + y &= 4, \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) &= 280. \end{aligned}$$

7. Определить a, b, c таким образом, чтобы многочлен

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 4$$

был квадратом другого многочлена и принимал значение 1 при $x = -1$.

8. Доказать формулу:

$$C_{m-k}^{m-k} \cdot C_n^m = C_{n+k-m}^{n-m} \cdot C_n^{n+k-m}.$$

9. Показать, что если α, β, γ — положительные числа, меньшие единицы, то

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) > 1-(\alpha+\beta+\gamma).$$

10. Построить треугольник ABC по стороне AB , биссектрисе BD и длине перпендикуляра, опущенного из вершины C на BD .

11. В треугольнике ABC провести прямую DE параллельно BC так, чтобы

$$BD + EC = 2DE.$$

12. Решить треугольник по радиусу r вписанного круга, радиусу R описанного круга и высоте h_a .

13. Доказать, что во всяком треугольнике

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r+4R}{p}$$

14. Решить уравнение: $\sec^2 x + \sec^2 2x = 12$.

15. Игра в монеты. Два игрока по очереди кладут на стол пятикопеечные монеты. Выигравшим игру считается тот, кто положит монету последним. Как должен класть монеты игрок, начинающий игру, чтобы обеспечить себе выигрыш?

Стол имеет прямоугольную форму. Монеты класть можно только на свободные места, чтобы они не закрывали друг друга даже отчасти. Каждый из играющих имеет неограниченное количество монет. Сдвигать монеты с мест, на которые они положены, нельзя.

II

16. Найти сумму девярых степеней корней уравнения:

$$x^3 + 3x + 9 = 0.$$

17. В данный треугольник вписать прямоугольник с наименьшей диагональю.

18. Найти вид функции из равенства:

$$n^{(n)-1} = (n-1)^{(n-1)}.$$

19. Стороны треугольника выражаются целыми числами:

$$f(n), \quad 1+f(n), \quad 2+f(n),$$

где $f(n) = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n - 1$.

Показать, что площадь его выражается целым числом

$$\frac{\sqrt{3}}{4} [(2 + \sqrt{3})^{2n} - (2 - \sqrt{3})^{2n}].$$

20. В эллипсе провести параллельно большой оси хорду так, чтобы, соединив концы ее прямыми с концами большой оси, получить трапецию наибольшей площади.

21. Применить к нахождению интеграла

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

способы: 1) интегрирование по частям, 2) вторую подстановку Эйлера, 3) третью подстановку Эйлера, и объяснить различие получающихся результатов.

22. Исследовать и вычислить действительные корни уравнения:
 $2^x = x + 3$.

23. В треугольнике AB_0B_1 сторона B_0B_1 продолжена и на ее продолжении построены равные отрезки $B_0B_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_{n-1}B_n = \dots$. Обозначив радиусы вписанных и описанных окружностей для треугольников AB_0B_1 , AB_1B_2 , ..., $AB_{n-1}B_n$, ... соответственно через r_1 , r_2 , ..., r_n , ... и R_1 , R_2 , ..., R_n , ..., доказать, что 1) при $n \rightarrow \infty$ радиус r_n стремится к нулю, а ряд

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n + \dots$$

— расходящийся; 2) ряд

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} + \dots$$

— сходящийся.

М. Зимин (Новочеркасск).

24. Найти геометрическое место вершин прямых углов, описанных около данной циклоиды.

25. Прямоугольная трапеция, большее основание которой 3, высота 2, а меньшее основание x удовлетворяет условию $0 \leq x \leq 3$, вращается около стороны, перпендикулярной к основанию. Найти наибольшее и наименьшее значение боковой поверхности тела вращения.

С М Е С Ъ

Об одной формуле

Известно, что уравнение

$$x^2 = y^3 + 1$$

имеет следующее полное решение (Эйлер):

$$x = \pm 3; \quad y = 2.$$

Перепишем его так:

$$x^2 + 2 = y^3 + 3.$$

Если обозначим через $[n]$ целую часть числа n , то получим формулу:

$$[\pi]^{[e]} + [e] = [e]^{[\pi]} + [\pi]^*,$$

где π и e — известные трансцендентные числа.

А. В.

*) $\pi = 3,14159 \dots$
 $e = 2,71828 \dots$

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

(Задачи, предложенные на вступительном поверочном испытании в I Московском государственном университете в сентябре 1933 г.)

1. Решить уравнение: $\frac{ab}{x-a} + \frac{ax}{x-b} = -b$.

2. Равнобедренный треугольник с основанием a и углом при вершине α вращается вокруг боковой стороны. Определить поверхность тела вращения.

3. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

$$\sin 2x + \cos x.$$

4. Точка внутри круга отстоит от центра его на расстоянии d . Хорда, проходящая через эту точку, делится в ней на части a и b . Определить радиус круга.

5. Решить уравнение: $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} x$.

6. Найти сумму 7 членов арифметической прогрессии, 6-й член которой равен -6 , а сумма 2-го и 5-го членов равна 3.

7. Чему равняется $\log \sqrt[n]{a} - a^{\frac{p}{q}}$?

1. Решить уравнение: $\frac{a+x}{ax^2} = \frac{1}{ax-x} + \frac{1}{a^2-a}$.

2. Определить полную поверхность правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна a , а плоский угол при вершине пирамиды равен α .

3. Привести к виду, удобному для логарифмирования: $\frac{1}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$.

4. В прямоугольном треугольнике с катетами b и c вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найти площадь этого квадрата.

5. Решить уравнение: $\sin 2x + \sin x = 0$.

6. Найти сумму 16 членов арифметической прогрессии, если сумма четырех первых членов этой прогрессии -28 , а сумма шести первых членов -58 .

7. Чему равняется $\lg_{0,01} 10$?

1. Решить уравнение: $\frac{ax^2}{x-1} - 2a = a^2 + 1$.

2. Определить объем прямой призмы, у которой в основании лежит ромб со стороной a и тупым углом α , если диагональ боковой грани этой призмы составляет с боковым ребром призмы угол β .

3. Привести к виду, удобному для логарифмирования: $\frac{1}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x}$.

4. В прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу равны p и q . Найти площадь треугольника.

5. Решить уравнение: $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = 0$.

6. Найти сумму 8 членов геометрической прогрессии, сумма 1-го и 4-го членов которой равна 18, а 2-го и 3-го членов равна 12.

7. Чему равняется $\log \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{a}$?

1. Решить уравнение: $(a+b)^2 x - \frac{b}{x} [a - (a+b)x] = a(a+b)$.

2. Основанием пирамиды служит квадрат со стороной a . Вершина пирамиды проектируется в одну из вершин этого квадрата так, что две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, а две другие наклонены к ней под одним и тем же углом α . Определить боковую поверхность пирамиды.

3. Привести к виду, удобному для логарифмирования: $\frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$.

4. В окружности радиуса R диаметр продолжен на длину радиуса, и на конечной точке этого продолжения проведена к окружности секущая, делящая окружность пополам. Найти длину этой секущей.

5. Решить уравнение: $\cos x - \sin \frac{x}{2} = 0$.

6. Найти сумму 10 членов арифметической прогрессии, 5-й член которой равен 9, а сумма 2-го и 9-го членов равна 20.

7. Чему равняется $\log_{\frac{1}{2}} 2$?

1. Решить уравнение: $x^2 = \frac{1}{ab} [x(a+b) - N]$.

2. Определить объем прямой призмы, в основании которой лежит ромб с меньшей диагональю d и с острым углом α , если угол между меньшей диагональю основания призмы и меньшей диагональю самой призмы равен β .

3. Привести к виду, удобному для логарифмирования:

$$\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

4. Определить площадь треугольника по основанию его a и по двум прилежащим к нему углам в 45° и 30° .

5. Решить уравнение: $\cos \frac{x}{2} + \cos x = 1$.

6. Найти сумму 8 членов арифметической прогрессии, в которой сумма крайних членов равна 25, а сумма 3-го и 5-го членов равна 19.

7. Чему равняется $\log_a \sqrt[n]{a}$?

БИБЛИОГРАФИЯ

А. КИСЕЛЕВ. Алгебра. Учебник для средней школы, ч. I, Учпедгиз, 1934, изд. 2-е, переработанное под редакцией А. Барсукова. Цена 70 к. Переплет 30 к.

Рассматриваемая книга принадлежит к числу стабильных учебников по математике, изданных Учпедгизом для средней школы. Эти учебники, согласно решению ЦК ВКП(б) от 12 февраля 1933 г., должны заменить применявшиеся ранее в школах «рабочие книги» по математике. Нет сомнения, что замена рабочих книг, приспособленных к лабораторному, лабораторно-бригадному и т. п. методам обучения, стабильными учебниками, отвечающими вновь введенному методу последовательного и систематического классного преподавания, должна отозваться самым благоприятным образом на преподавании в средней школе. Это особенно относится к математике, по самой сущности своей не допускающей мозаичного и бессистемного изложения, применявшегося в рабочих книгах. Необходимо, однако, чтобы при этом новые учебники математики удовлетворяли трем основным условиям: 1) они должны содержать полное и ясное изложение назначенного по программе материала; 2) в них должны быть сообщаемы дополнительные сведения, возбуждающие интерес к предмету и содействующие математическому развитию учащихся; 3) они должны содержать необходимое количество типовых примеров и упражнений для учащихся, поясняющих излагаемую теорию. В частности, желательны примеры и задачи из области других математических дисциплин и социалистического строительства страны. Наряду с этим, конечно, предполагается наличие отдельных сборников задач.

Рассматриваемый учебник, представляющий переработку известного курса алгебры А. П. Киселева, в общем отвечает вышеприведенным требованиям. В нем излагается в ясной и доступной для учащихся форме алгебраический материал, соответствующий программам 6 и 7-го годов обучения в средней школе. Изложение в нескольких местах сопровождается историческими справками и некоторыми подробностями, способными заинтересовать учащихся. Есть в книге и примеры для упражнений.

По поводу содержащегося в книге материала отметим, что в ней нет ответа на некоторые пункты программы 6 и 7-го годов обучения. Так, опущены: графическая иллюстрация решений одного уравнения с двумя неизвестными; отыскание квадратного корня из чисел по графику и при помощи таблиц, иррациональное число и некоторые другие. Однако мы полагаем, что упомянутые вопросы попали в программу по недоразумению, и поэтому пропуск их в учебнике вполне правилен. Но, с другой стороны, мы не можем признать правильным пропуск в программе статей о пропорциях и о неравенствах (неравенства упоминаются лишь в программе 9-го года обучения); нет раздела о пропорциях и в первой части учебника А. Киселева, а неравенства помещены лишь в самом конце второй части, хотя автор, конечно, вынужден ими пользоваться ранее, например, уже при изложении относительных чисел.

Что касается самого изложения материала, то основной вопрос — об относительных числах и действиях над ними — трактуется не на основании известных определений и условий относительно введения отрицательных чисел, а при помощи конкретного рассмотрения величин, способных изменяться в двух противоположных смыслах. Однако автор не выдерживает везде такого характера изложения и, например, в § 24, трактующем о сравнении относительных чисел по величине, вводит понятие о том, какое из относительных чисел больше, с помощью условия, причем конкретных примеров, подтверждающих соответствие вводимого условия с реальною действительностью, никаких

не дает, а ограничивается только иллюстрацией его на числовой прямой. Сложение и вычитание относительных чисел разъясняются на примерах с конкретным содержанием и без обращения к отрезкам, что, по нашему мнению, является удачным, так как действия с направленными отрезками обычно затрудняют учащихся. Но умножение относительных чисел выводится из рассмотрения традиционной задачи, помещаемой для этого во многих учебниках, именно — относительно места нахождения поезда в определенный момент времени. Так как и расстояния и промежутки времени по смыслу задачи могут быть и положительными и отрицательными, то рассматриваемая задача действительно дает возможность конкретного вывода правила знаков при умножении. Однако она не отличается достаточной простотой, кроме того, она оперирует с геометрическими и механическими понятиями, еще недостаточно привычными для учеников, и не имеет прямой связи с арифметикой. Поэтому они нередко сильно путаются при этом выводе, полученные результаты кажутся им искусственными и случайными, а вывод из них общего правила знаков — недостаточно обоснованным. Ввиду этого желательно дать для правила умножения относительных чисел более простое и более обоснованное изложение, дав для него новое определение и примеры конкретного характера. Отметим еще, что, правильно считая необходимым подтверждать, хотя бы на примерах, справедливость основных законов арифметических действий — переместительности и сочетательности при сложении и переместительности, сочетательности и распределительности при умножении — для действий над относительными числами, автор проверки закона распределительности умножения для относительных чисел не дает. Между тем при умножении многочлена на одночлен и далее при умножении многочлена на многочлен он ссылается на этот закон; поэтому остается необоснованным и деление многочлена на одночлен и многочлен и пр.

Далее, мы считаем лишним введение в § 57 понятия о нулевом показателе, которое здесь программой не требуется и которым автор после не пользуется. Излагая деление многочлена на многочлен, автор говорит, что делимое и делитель можно располагать и по возрастающим степеням одной и той же буквы, между тем это возможно лишь в случае деления без остатка, чего заранее предвидеть нельзя. Примеров на подобное деление не дается. Из формул сокращенного деления $\frac{a^3 - b^3}{a - b}$ и $\frac{a^3 + b^3}{a + b}$, требуемых программой, приведена лишь первая, да и то в качестве примера.

В отделе 4, посвященном уравнениям первой степени, доказываются общие теоремы о равносильности уравнений. Это, повидимому, соответствует упоминанию программы: «два основных свойства уравнений». Однако нельзя не признать введение этой статьи преждевременным, так как для учащихся, не знакомых еще с решением одного уравнения первой степени с одним неизвестным, не могут быть понятны случаи потери или прибавления корней в уравнениях высших степеней, примерами которых иллюстрируется эта теория. Примеров уравнения первой степени, при решении которых мог бы возникнуть вопрос о потере или приобретении новых корней, далее не приводится. Задача на составление уравнений из условий задачи приведена лишь одна, чего, конечно, недостаточно для пояснения столь важного отдела, обычно затрудняющего учащихся. Примеров на исследование полученных решений по отношению к содержанию задачи не дается. В § 93, где говорится о том, что в одном уравнении с двумя неизвестными можно назначить для одного из неизвестных произвольное значение, приведена в качестве примера задача: «Найти стороны равнобедренного треугольника, которого периметр равен 40 м». Однако как раз в этой задаче и нельзя назначить для основания треугольника x произвольного значения, как это делает автор, но лишь $x < 20$, иначе треугольник невозможен. Заметим кстати, что других примеров из области геометрии в книге приведено крайне мало, хотя они очень желательны для связи обеих наук.

Имеются неточности в исторических сведениях. Так, на стр. 98 говорится, что в египетском папирусе, написанном Ахмесом, уже встречаются уравнения первой степени с одним неизвестным. Между тем в этом папирусе никаких уравнений нет, ибо они были изобретены гораздо позже, а есть только задачи на нахождение неизвестного числа, решаемые способом попыток.

Число задач и упражнений в рассматриваемом издании книги больше, чем в предыдущем, но все же оно еще не может считаться достаточным; притом же они не всегда вполне тщательно проредактированы. Так, в § 108 даны упражнения на извлечение квадратного корня из дробей, тогда как в теории об этом говорится лишь в § 109. Отметим, что в том же параграфе не объяснено, о каком корне идет речь — об арифметическом или алгебраическом, — что в данном случае имеет важное значение. При выводе формулы решения приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ не объяснено, почему, извлекая корень из обеих частей уравнения: $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, мы ставим двойной знак только в правой части.

Не останавливаясь на других недочетах книги А. Киселева, заметим, что они легко могут быть исправлены при последующих изданиях и что она в общем может быть признана вполне пригодным учебником алгебры для средней школы.

И. Чистяков.

ОТ РЕДАКЦИИ

Настоящая заметка помещается с целью открыть дискуссию по весьма важному вопросу о стабильных учебниках по математике для средней школы.
